

**Slezská univerzita v Opavě  
Filozoficko-přírodovědecká fakulta v Opavě**

---

# **ÚVOD DO MODERNÍ FYZIKY**

**Distanční studijní opora**

**Jan Schee  
Zdeněk Stuchlík**

**Opava 2008**

**Obor:** PTA

**Klíčová slova:** teorie relativity, kvantová mechanika, atomová a jaderná fyzika, jaderná elektrárna, tokamak

**Anotace:** Úvod do moderní fyziky je učebním textem, který studenty aplikované fyziky uvede do problematiky teorie relativity a kvantové mechaniky a jejich aplikací, zejména v oblasti jaderné a termojaderné energetiky.

**© Mgr. Jan Schee**  
**Prof. RNDr. Zdeněk Stuchlík CSc.**

Lektoři:

**ISBN**

# OBSAH

|                                                       |           |
|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY</b>                  | <b>7</b>  |
| 1.1 Základní principy                                 | 10        |
| 1.2 Odvození Lorentzových transformací                | 14        |
| 1.3 Dilatace času a kontrakce délek                   | 15        |
| 1.3.1 Kontrakce délek                                 | 15        |
| 1.3.2 Dilatace času                                   | 16        |
| 1.4 „Paradox“ dvojčat                                 | 16        |
| 1.5 Skládání rychlostí                                | 17        |
| 1.6 Další kinematické relativistické efekty           | 18        |
| 1.6.1 Změna úhlů a objemu pohybujících se těles       | 18        |
| 1.6.2 Dopplerův jev                                   | 19        |
| 1.7 Relativistická dynamika                           | 21        |
| 1.7.1 První Newtonův zákon v relativistické dynamice  | 21        |
| 1.7.2 Zákony zachování hybnosti                       | 21        |
| 1.7.3 Zákon zachování energie                         | 23        |
| 1.7.4 Relativistická transformace 2. Newtonova zákona | 24        |
| <b>2 OBECNÁ TEORIE RELATIVITY</b>                     | <b>31</b> |
| 2.1.1 Princip ekvivalence                             | 32        |
| 2.1.2 Princip obecné kovariance                       | 35        |
| 2.1.3 Křivočará geometrie                             | 36        |
| 2.1.4 Einsteinovy rovnice gravitačního pole           | 36        |
| 2.1.5 Gravitační rudý posuv                           | 37        |
| <b>3 KVANTOVÁ MECHANIKA</b>                           | <b>40</b> |
| 3.1 Začátky kvantové mechaniky                        | 41        |
| 3.1.1 Záření absolutně černého tělesa (AČT)           | 41        |
| 3.1.2 Fotoelektrický efekt                            | 45        |
| 3.1.3 Comptonův efekt                                 | 46        |
| 3.1.4 Bohrův model atomu                              | 49        |
| 3.1.5 Franckův – Hertzův experiment                   | 50        |
| 3.1.6 Sternův – Gerlachův experiment                  | 51        |
| 3.1.7 Heisenbergovy relace neurčitosti                | 51        |
| 3.2 Vlnové vlastnosti látky                           | 53        |
| 3.2.1 Difrakce hmotných vln                           | 55        |
| 3.3 Schrödingerova rovnice                            | 56        |
| 3.3.1 Interpretace vlnové funkce                      | 58        |
| <b>4 STRUKTURA ATOMU</b>                              | <b>60</b> |
| 4.1 Vodíkový model atomu                              | 61        |
| 4.2 Schrödingerova rovnice pro vodík                  | 61        |
| 4.2.1 Spin elektronu a Pauliho vylučovací princip     | 65        |
| <b>5 ATOMOVÉ JÁDRO</b>                                | <b>70</b> |
| 5.1 Model jádra                                       | 71        |
| 5.2 Odhad velikosti jádra                             | 72        |
| 5.3 Účinný průřez a diferenciální účinný průřez       | 74        |
| 5.4 Rutherfordův rozptyl                              | 77        |
| 5.4.1 $\alpha$ a $\beta$ částice                      | 77        |

|                                                             |            |
|-------------------------------------------------------------|------------|
| 5.4.2 Rutherfordova teorie.....                             | 77         |
| 5.4.3 Rutherfordův účinný průřez.....                       | 83         |
| <b>5.5 Urychlovače částic.....</b>                          | <b>84</b>  |
| 5.5.1 Cyklotron.....                                        | 84         |
| 5.5.2 Moderní urychlovače.....                              | 85         |
| <b>5.6 Struktura jádra.....</b>                             | <b>90</b>  |
| 5.6.1 Vlastnosti protonu a neutronu.....                    | 91         |
| 5.6.2 Jaderné síly.....                                     | 93         |
| <b>5.7 Modely jádra.....</b>                                | <b>97</b>  |
| 5.7.1 Kapkový model.....                                    | 97         |
| 5.7.2 Slupkový model.....                                   | 101        |
| <b>5.8 Transformace jader.....</b>                          | <b>103</b> |
| 5.8.1 Zákon radioaktivního rozpadu.....                     | 103        |
| 5.8.2 Poločas rozpadu.....                                  | 104        |
| 5.8.3 Zákon rozpadu pro nestabilní dceřiná jádra .....      | 107        |
| 5.8.4 Radioaktivní řady.....                                | 109        |
| <b>5.9 Rozpadové mechanismy.....</b>                        | <b>114</b> |
| 5.9.1 Alfa rozpad .....                                     | 114        |
| 5.9.2 Teorie alfa rozpadu.....                              | 117        |
| 5.9.3 Beta rozpad.....                                      | 121        |
| 5.9.4 Fázový prostor a teorie beta rozpadu.....             | 123        |
| 5.9.4.1 Záchyt elektronů.....                               | 125        |
| 5.9.5 Gama rozpad a vnitřní přeměna.....                    | 126        |
| 5.9.6 Nízkoenergetické jaderné reakce.....                  | 126        |
| 5.9.7 Práh energie.....                                     | 130        |
| <b>5.10 Jaderné štěpení a jaderná slučování (fúze).....</b> | <b>132</b> |
| 5.10.1 Jaderné štěpení.....                                 | 132        |
| 5.10.2 Jaderná fúze.....                                    | 136        |

## ÚVODEM

Tento text je učební oporou pro studenty kombinovaného studia oboru Aplikovaná fyzika pro přednášky Úvod do moderní fyziky. Pokrývá základní témata z tzv. Moderní fyziky, kterou jsou souhrnně označovány nové oblasti fyziky, které se začaly vyvíjet na začátku 20. století. Patří zde zejména speciální teorie relativity, obecná teorie relativity, kvantová teorie, atomová a jaderná fyzika, fyzika elementárních částic a mnoho dalších.

V tomto textu uvádíme základy speciální a obecné teorie relativity, kvantové mechaniky a atomové a jaderné fyziky.

## RYCHLÝ NÁHLED STUDIJNÍ OPORY

Na následujících stránkách bude student seznámen s důvody, které vedly fyziky k hledání nových teorií. Dále jej tento text seznámí se základními fyzikálními principy a definicemi. Na řešených příkladech bude mít student možnost vidět, jak některé definice a principy fungují konkrétně. Na samostatných úkolech má možnost osvojit si naučenou látku.

## 1 SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY [1][7]

### **RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY**



Nastínění důvodů, které nakonec vedly ke vzniku teorie relativity. Princip relativity, princip konečné rychlosti světla. Lorentzovy transformace a jejich odvození. Důsledky Lorentzových transformací - kontrakce délky a dilatace času. Vysvětlení paradoxu dvojčat. Další kinematické relativistické efekty jako Dopplerův jev, změna úhlů a objemu pohybujících se těles. Dynamika ve speciální teorii relativity.

### **CÍLE KAPITOLY**



Po prostudování této kapitoly budete umět:

- Michelsonův a Morleyho experiment a jeho důsledky pro klasickou mechaniku,
- základní principy, na kterých stojí teorie relativity,
- odvození Lorentzových transformací ze základních principů STR,
- odvození relativistických efektů: dilatace času a kontrakce délky,
- vysvětlit, že tzv. Paradox dvojčat vlastně žádný paradox není,
- odvození vztahů pro sčítání rychlostí,
- odvození Dopplerovského efektu,
- odvození vztahů pro změnu úhlů a objemu pohybujících se těles,
- zavedení relativistické dynamiky – zákony zachování energie a hybnosti, odvození výrazu pro celkovou energii částice, transformaci síly (2. Newtonova zákona).

### **KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY**



relativita, světlo, transformace, kinematika, dynamika, hybnost, energie

V roce 1887 Albert Michelson a Edward Morley uspořádali experiment, kterým chtěli dokázat existenci privilegovaného systému – éteru – ve kterém by se měly šířit elektromagnetické vlny (např. světlo) právě rychlostí  $c$ . Pokud takový systém existuje a

pozorovatel se vůči němu pohybuje rychlostí  $V$ , pak by měl naměřit rychlost světla mířícího ve směru pohybu pozorovatele  $c_1 = c - V$  a rychlost světla mířícího proti směru pohybu pozorovatele  $c_2 = c + V$ . Sestavili interferometr (obrázek 1-1), kterým měřili rychlost světla vůči pozorovateli na Zemi, která se pohybuje vůči tomu hypotetickému éteru rychlostí  $V$ . V obou směrech však naměřili stejnou hodnotu rychlosti světla. Tím bylo ukázáno, že žádný privilegovaný systém neexistuje.

Podívejme se na tento experiment podrobněji. Ze zdroje  $Z$  se světlo šíří směrem k polopropustnému zrcátku  $P$ , kde se rozdělí na dva svazky. Jeden svazek míří kolmo na původní směr šíření k zrcadlu  $Z1$ , kde se odrazí a putuje k detektoru  $D$ . Druhý svazek zůstává v původním směru a míří k zrcadlu  $Z2$ , kde se odrazí a putuje zpět k  $P$ , kde je odražen kolmo do směru k detektoru  $D$ . V  $D$  dojde k interferenci obou svazků.

Nyní necht' se toto zařízení pohybuje rychlostí  $V$  vůči éteru (tj. Rychlost, kterou se pohybuje Země kolem Slunce) a rameno  $PZ2$  necht' míří ve směru tohoto pohybu. Svazek mířící k zrcadlu  $Z2$  se pohybuje vůči éteru rychlostí  $c-V$  a po odraze putuje rychlostí  $c+V$ . Dráhu  $PZ2P$  urazí za dobu

$$t_2 = \frac{L}{c-V} + \frac{L}{c+V} = \frac{2L}{c^2 - V^2} \quad (1-1)$$

Svazek, který míří od  $P$  k  $Z1$ , má vůči éteru komponentu rychlosti ve směru pohybu  $-V$  a pohybuje se tedy vůči éteru rychlostí

$$\tilde{c} = \sqrt{c^2 - V^2} \quad (1-2)$$

Doba, za kterou urazí dráhu  $PZ1P$ , je

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} \quad (1-3)$$

Časový rozdíl má potom tvar

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2Lc}{c^2 - V^2} - \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - 1 \right) \approx \frac{L}{c} \left( \frac{V}{c} \right)^2, \quad (1-4)$$

kde jsem vzali členy do 2.řádu. Pro dráhový rozdíl tedy dostáváme

$$\Delta L = c \Delta T = L \left( \frac{V}{c} \right)^2 \quad (1-5)$$

Použijeme-li v experimentu světlo o vlnové délce  $\lambda$ , posune se interferenční obrazec o



$$m = \Delta \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} \left( \frac{V}{c} \right)^2 \quad (1-6)$$

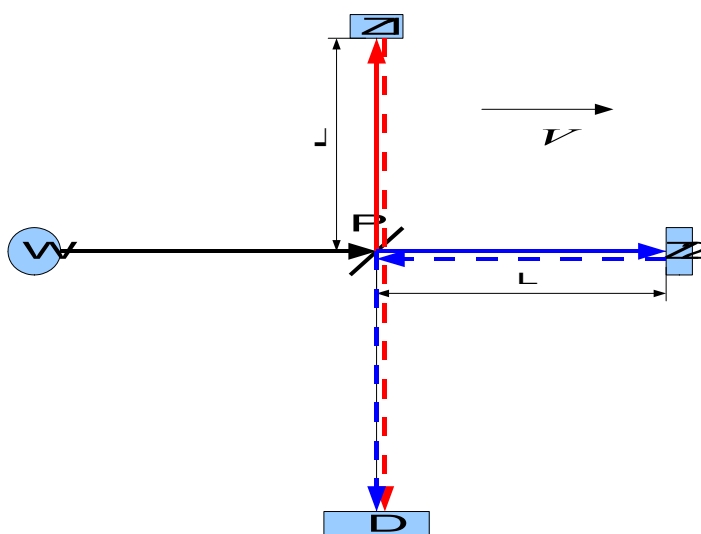
proužků oproti stavu, kdy je interferometr vůči éteru v klidu. Otočíme -li do směru pohybu druhé rameno, posune se obrazec o stejný počet proužků ale na opačnou stranu. Celkový posun tedy činí

$$2m = \frac{2L}{\lambda} \left( \frac{V}{c} \right)^2 . \quad (1-7)$$

Rychlost Země vůči éteru je asi 30 km/s, což znamená, že  $(V/c)^2 \approx 10^{-8}$ . Při použití světla o vlnové délce  $\lambda = 500$  nm a délce ramen interferometru  $L = 10$  m by měl posun být přibližně

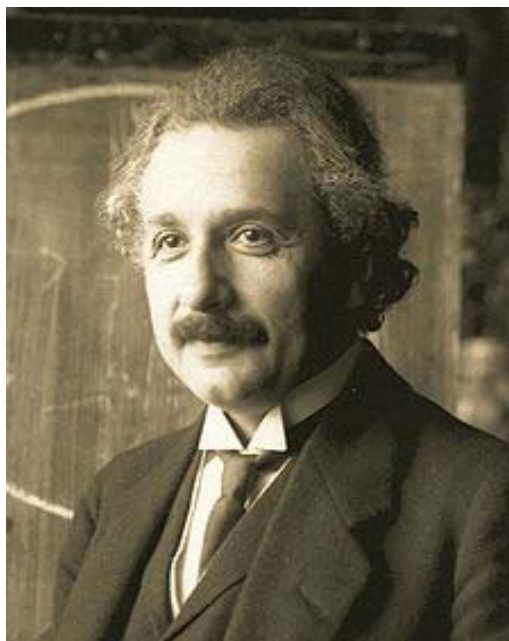
$$2m \approx 0.4 , \quad (1-8)$$

což je v rámci přesnosti Michalsonova interferometru dostačující. Výsledek však žádný posun interferenčního obrazce neukázal ! Jedním z přístupů, jak tento jev vysvětlit, byla kontrakce délky ramene ve směru pohybu. Albert Einstein ovšem zkonstruoval teorii, jejímž přirozeným důsledkem jsou kontrakce délek a dilatace čas, a přitom se neopírá o existenci éteru. Éter odsouvá do propadliště dějin fyziky.



Obrázek 1-1: Michalsonův interferometr. W je zdroj světla, P je polopropustné zrcátko, Z1 a Z2 jsou zrcadla na konci ramen interferometru a D je detektor, kde vzniká interferenční obrazec.

## 1.1 Základní principy



Obrázek 1-2: Albert Einstein (\*1879 - + 1955)

V roce 1905 přivedl Albert Einstein na světlo světa teorii relativity, která řeší problémy nekompatibility Newtonovské mechaniky a Maxwelových rovnic. Je postavena na dvou základních principech (0-tý princip: mlčky budeme předpokládat existenci inerciálních vztažných systémů):

1. *princip relativity* říká, že fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech inerciálních systémech.
2. podle *principu konstantní rychlosti světla* má velikost rychlosti světla určitou hodnotu, která je vždy stejná nezávisle na pohybovém stavu zářiče.

Podle prvního principu mají relace mezi fyzikálními veličinami stejný tvar ve všech inerciálních systémech. Podle druhého principu není možné dohnat světlo, protože vůči kterémukoliv inerciálnímu systému se světlo pohybuje vždy stejnou rychlostí  $c$ .

Albert Einstein z těchto dvou principů odvodil transformační vztahy mezi vzájemně se pohybujícími inerciálními systémy, které už dříve odvodil Lorentz ve své etherové teorii. Pro dva inerciální systémy  $S$  a  $S'$ , které jsou orientovány identicky, přičemž inerciální systém  $S'$  se pohybuje vůči systému  $S$  rychlostí  $V$  ve směru osy  $x$ , pak mají tyto transformace tvar

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}}, \\x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}, \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1-9}$$

V další kapitole odvodíme tyto transformace ze základních principů teorie relativity. V následující řešené úloze jsou odvozeny inverzní transformační vztahy ke vztahům (1-9). V řešené úloze 1-2 je ukázáno, že pokud jsou dvě události v jedné soustavě současné, tak nemusí být současné v pohybující se soustavě.

### ŘEŠENÁ ÚLOHA 1-1



Určete inverzní transformace k transformacím (1-9).

Řešení:

V případě transformací souřadnic  $y$  a  $z$  je řešení triviální

$$\begin{aligned}y &= y', \\ z &= z'.\end{aligned}\tag{1-10}$$

V případě souřadnic  $t$  a  $x$  řešíme soustavu dvou rovnic (první dvě rovnice v (1-1)) o dvou neznámých  $t$  a  $x$  s parametry  $t', x'$  a  $V$ , tj.

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}} \\ x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \end{aligned} \quad (1-11)$$

a dostáváme výsledek

$$\begin{aligned} t &= \frac{t' + Vx'}{\sqrt{1 - V^2}}, \\ x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2}}. \end{aligned} \quad (1-12)$$

Ke stejnému výsledku dospějeme jednoduchou úvahou. Z pohledu  $S$  se systém  $S'$  pohybuje ve směru  $x$  (rychlostí  $V$ ). Ovšem z pohledu  $S'$  se pohybuje  $S$  taky podél osy  $x$ , ale v opačném směru, tj. rychlostí  $-V$ . V důsledku to znamená prohodit čárkování souřadnic a místo  $V$  psát  $-V$ .



### ŘEŠENÁ ÚLOHA 1-2

V systému  $S$  se v místě  $x_1$ , v čase  $t_1$  rozsvítí žárovka  $Z1$  a současně v místě  $x_2$  a čase  $t_2 = t_1$  se rozsvítí žárovka  $Z2$ . Jak se bude jevit tato situace z pohledu pozorovatele v systému  $S'$ ? Budou obě události taky současné z pohledu  $S'$ ?

Řešení:

Dosazením do první rovnice v (1-9) dostaneme

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{t_1 - Vx_1/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ t'_2 &= \frac{t_1 - Vx_2/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (1-13)$$

Po odečtení obou rovnic dostáváme výraz

$$t'_1 - t'_2 = \frac{V}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \neq 0 \quad (1-14)$$

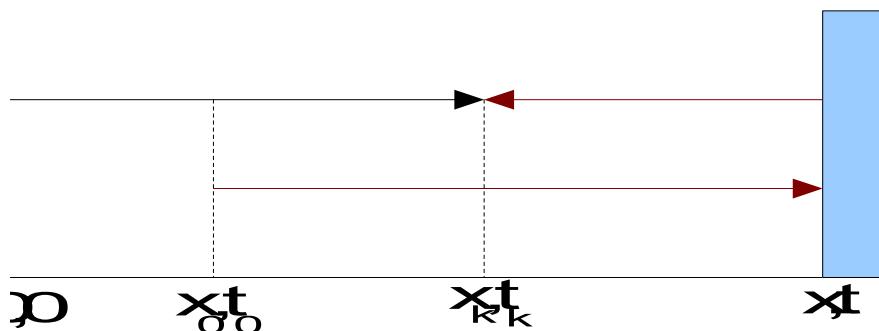
Z tohoto výsledku je hned jasné,  $t'_1 \neq t'_2$  a tedy události, které jsou současné v  $S$ , nejsou současné v  $S'$ . Je-li  $x_2 > x_1$ , tak se, z pohledu  $S'$  nejprve rozsvítí žárovka Z2 a potom žárovka Z1. V klasické fyzice je  $t'_1 = t_1$  a  $t'_2 = t_2$ . Události současné v jednom inerciálním systému jsou tedy současné i v jiném.

### SAMOSTATNÝ ÚKOL 1



Mějme v systému  $S$  dvě události  $U1=(t_1, x_1)$  a  $U2=(t_2, x_2)$ . Necht' jsou tyto události souměstné v systému  $S$ , tj.  $x_1=x_2$ . Jsou tyto události souměstné i z pohledu pozorovatele v systému  $S'$ ? Porovnejte s klasickým přístupem.

## 1.2 Odvození Lorentzových transformací



Obrázek 1-3: Schéma myšlenkového experimentu z pohledu pozorovatele v  $S$ , vůči kterému se  $S'$  pohybuje rychlostí  $V$  ve směru osy  $x$ , který vede k odvození Lorentzových transformací. V čase  $t_0$  a místě  $x_0$  vyzáří pozorovatel v  $S'$  světelný signál, který doputuje k zrcadlu v místě  $x$  a čase  $t$ , odrazí se, je registrován v  $S'$  v místě  $x_k$  a čase  $t_k$ .

Mějme dva inerciální souřadné systémy  $S$  a  $S'$ . Necht' jsou osy obou systémů shodně orientovány a v okamžiku  $t=0$  počátky splývají.  $S'$  se pohybuje vůči  $S$  rychlostí  $V$  ve směru osy  $x$ . Pozorovatel v  $S'$  vyzáří světelný signál v události  $[x_o, t_o]$  (z pohledu pozorovatele v  $S$ ) a přijme jej v události  $[x_k, t_k]$  po jeho odražení v události  $[x, t]$ . Z času vyslání  $t_o$  a přijetí  $t_k$  signálu je okamžik odražení světelného signálu roven

$$t = \frac{t_k + t_o}{2} . \quad (1-15)$$

Pomocí kinematiky vyjádříme  $t_o$  a  $t_k$  jako funkce  $t, x, V$  a dostaneme výrazy

$$\begin{aligned} x - x_o &= \frac{c}{2}(t - t_o), \\ x_o &= V t_o, \\ x - x_k &= \frac{c}{2}(t_k - t), \\ x_k &= V t_k. \end{aligned} \quad (1-16)$$

Z výrazů (1) a (2) dostáváme

$$t = \frac{t - xV/c^2}{1 - V^2/c^2} . \quad (1-17)$$

Nyní předpokládejme, že mezi časem  $t$  a  $t'$  je lineární závislost

$$\begin{aligned} t' &= k(V)t, \\ t &= k(-V)t'. \end{aligned} \quad (1-18)$$

Z prvního principu zjistíme, že v místě  $x=0$  musí být  $k(V)=k(-V)$  a tedy z (3) a (4) dostáváme

$$k(V) = \sqrt{1 - V^2/c^2}, \quad (1-19)$$

$$t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} . \quad (1-20)$$

Vztahy mezi  $x$  a  $x'$  dostaneme z požadavku

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2 \quad (1-21)$$

dosazením z (6) a dostáváme výsledek

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} . \quad (1-22)$$

### 1.3 Dilatace času a kontrakce délek

V následujících dvou podkapitolách odvodíme dva důležité relativistické efekty, kontrakci (zkrácení) délkových škál ve směru pohybu z pohledu systému, vůči kterému se měřený objekt (tyč) pohybuje a dilataci (prodloužení) časového intervalu, který uběhne na hodinách pozorovatele, vůči kterému je objekt (blikající žárovka) v pohybu.

#### 1.3.1 Kontrakce délek

Mějme tyč délky  $l_0 = x'_2 - x'_1$  v klidu v soustavě  $S'$ . Nechť se  $S'$  pohybuje vůči  $S$  ve směru osy  $x$ . Jakou bude mít tyč délku z pohledu systému  $S$ ? Pozorovatel v  $S$  musí přirozeně určit polohu začátku  $x_1$  a konce  $x_2$  tyče současně, řekněme v okamžiku  $t_0$ . Z rovnice (8) potom dostáváme výraz

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - V t_0 - x_1 + V t_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1-23)$$

Pozorovatel v  $S'$  změří délku tyče, která je vůči němu v klidu  $l_0$ , ale pozorovatel zjistí, že tato tyč, která se vůči němu pohybuje rychlostí  $V$  ve směru  $x$ , bude mít délku  $l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2} < l_0$ . Proto mluvíme o kontrakci délek.

#### SAMOSTATNÝ ÚKOL 2



Jak se bude jevit délka tyče, která leží ve směru osy  $x'$  a v systému  $S'$ , vůči kterému je v klidu, má délku  $l_0 = 2\text{m}$ ? Systém  $S'$  se pohybuje vůči systému  $S$  rychlostí  $V = 0.9995$  ve směru osy  $x$ .

#### 1.3.2 Dilatace času

Uvažujme dvě události, rozsvícení a zhasnutí žárovky v klidu v soustavě  $S'$ . Mezi událostmi je, měřeno hodinami  $H'$ , časový interval  $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ . Poloha této události je v  $S'$  fixní,  $x'_0$  (z pohledu  $S$  se samozřejmě poloha události mění). Jaký časový interval  $\Delta t = t_2 - t_1$  naměří pozorovatel v  $S$ ? Vezměme inverzní rovnice k rovnicím (6) a (8)

$$t = \frac{t' + x' V / c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (1-24)$$

$$x = \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1-25)$$

Časový interval události z pohledu  $S$  potom je

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + x'_0 V/c^2 - t'_1 - x'_0 V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (1-26)$$

Jestliže událost z pohledu  $S'$  trvá časový interval  $\Delta t'$ , pak pozorovatel v  $S$  zjistí, že z jeho pohledu ta samá událost trvá  $\Delta t' / \sqrt{1 - V^2/c^2} > \Delta t'$ . Proto dilatace (prodloužení) času.

## 1.4 „Paradox“ dvojčat

Kritikové Einsteinovy teorie relativity vymýšlejí myšlenkové experimenty, na kterých se snaží ukázat nekonzistenci této teorie. Jedním z nich je tzv. „Paradox“ dvojčat.

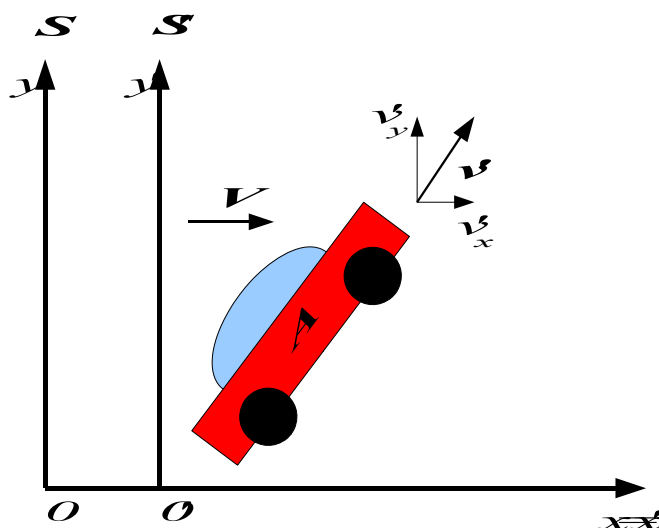
Dvojčata Petr a Pavel se spolu domluví, že ověří platnost speciální teorie relativity. Pavel se vydá do Vesmíru v kosmické lodi rychlostí  $V = 0.99c$ . Po pěti letech, které uběhnou na lodi, uběhne na Zemi, užitím vztahu (10), přibližně 35 let. Takže zatímco Pavel zestárne pouze o 5 let, jeho dvojče na Zemi zestárne o 35 let. Ale podle prvního principu se můžeme na tento pokus dívat tak, že z pohledu Pavla se jeho dvojče Petr žene i se Zemí do Vesmíru rychlostí  $V = -0.99c$  a tedy Petr by měl zestárnout pouze o pět let a Pavel o třicet pět let! Odpůrci STR v tomto okamžiku namítají, kdo tedy opravdu zestárne o těch 35 let? Odpůrci zapomínají na to, že aby mohli Petr a Pavel srovnat své hodiny, musí se opět setkat, to znamená, že Pavel musí po dvou a půl letech letu zpomalit, zastavit, obrátit a znovu urychlit svou loď, aby se dostal zpět ke svému dvojčeti. Zakusí události, které Petr samozřejmě nezakusí a zde je asymetrie tohoto pokusu, která jednoznačně identifikuje, že Petr (na Zemi) zestárne o 35 let. V důsledku se nejedná o žádný paradox.

## 1.5 Skládání rychlostí

Mějme dva souřadné systémy  $S$  a  $S'$ . Systém  $S'$  necht' se pohybuje ve směru osy  $x$  vůči  $S$  rovnoměrně rychlostí  $V$ . Dále, necht' se vůči systému  $S'$  pohybuje automobil  $A$  ve směru osy  $x'$  rychlostí  $W'$ . Jakou rychlost auta  $A$  naměří pozorovatel v  $S$ ? Najdeme odpověď na tuto otázku nejprve klasicky, tj. podle Newtona. Necht' auto  $A$  vyrazilo v čase  $t'=0$  z  $x'=0$ . Jeho poloha  $x'_A$  v čase  $t'_A$  je  $x'_A = v'_x t'_A$ . Vůči systému  $S$  je jeho poloha  $x_A = v_x t_A$ . Galileova transformace přechodu od  $S$  k  $S'$  má tvar  $x'_A = x_A - V t_A$ . V Newtonovské mechanice je jen jeden čas a tedy  $t'_A = t_A$ . Dostáváme po dosazení, že  $v_x = V + v'_x$ .

Nyní určíme rychlost  $W$  auta relativisticky. Oproti předchozímu odvození musíme nahradit Galileovu transformaci Lorentzovou, tj.





Obrázek 1-4: Skládání rychlostí. Systém  $S'$  se pohybuje vůči  $S$  rychlostí  $V$  a vůči systému  $S'$  se pohybuje auto  $A$  rychlostí  $v'$ . Určujeme, jakou rychlost auta naměří pozorovatel v  $S$ .

$$x_A = \frac{x'_A + Vt'_A}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (1-27)$$

a vztah mezi časy  $t'_A$  a  $t_A$  je

$$t_A = \frac{t'_A + x'_A V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (1-28)$$

Když obě tyto relace podělíme a vytkneme z čitatele i jmenovatele  $t'_A$ , tak dostaneme výsledek

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + V v'_x/c^2} \quad (1-29)$$

V případě komponent rychlosti  $v_y$  a  $v_z$  se projeví pouze změna chodu času, protože  $y_A = y'_A$  a  $z_A = z'_A$ . Užitím těchto výrazů a výrazu (1-19) dostáváme

$$v_y = \frac{y_A}{t_A} = \frac{y'_A \sqrt{1 - V^2/c^2}}{t'_A + x'_A V/c^2} = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} \quad (1-30)$$

a

$$v_z = \frac{z_A}{t_A} = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} . \quad (1-31)$$

Když se  $v'_x \rightarrow 1$ , tj. k rychlosti světla, tak i  $v_x \rightarrow 1$ . Nedojde k situaci, aby při skládání rychlostí byla v některé inerciální soustavě překročena rychlost světla. V případě klasického skládání rychlostí tomu tak samozřejmě není.

## 1.6 Další kinematické relativistické efekty

### 1.6.1 Změna úhlů a objemu pohybujících se těles

Tyto efekty jsou přímými důsledky kontrakce délek. Necht' v systému  $S'$  svírá přímka s osou  $x'$  úhel  $\alpha'$ . Potom dostáváme výraz pro tangens tohoto úhlu výraz

$$\operatorname{tg}(\alpha') = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x/\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma^{-1} \operatorname{tg}(\alpha) , \quad (1-32)$$

kde  $\alpha$  je úhel, který svírá výše zmíněná přímka v systému  $S$  s osou  $x$ . Úpravou snadno dostaneme výraz pro  $\operatorname{tg}(\alpha)$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \gamma \operatorname{tg}(\alpha') . \quad (1-33)$$

Nyní odvodíme, jak se při Lorentzově transformaci změní objem krychle. Máme krychli o stranách  $x'_0$ ,  $y'_0$  a  $z'_0$ , v systému  $S'$  zaujímá objem  $U' = x'_0 y'_0 z'_0$ . Objem, který změří pozorovatel v  $S$ , získáme následovně. Protože se  $S'$  pohybuje ve směru  $x$  vůči  $S$ , délky stran ve směru  $y$  a  $z$  jsou

$$y_0 = y'_0 \quad a \quad z_0 = z'_0 , \quad (1-34)$$

zatímco délka strany ve směru  $x$  podléhá kontrakci a tedy máme

$$x_0 = x'_0 \sqrt{1 - V^2/c^2} . \quad (1-35)$$

Pro objem krychle z pohledu pozorovatele v systému  $S$  dostáváme

$$U = U' \sqrt{1 - V^2/c^2} . \quad (1-36)$$

Objem krychle z pohledu  $S'$  bude větší než z pohledu pozorovatele v  $S$ .

**SAMOSTATNÝ ÚKOL 3**

Máme dva inerciální vztažné systémy **S** a **S'**. **S'** se pohybuje vůči **S** ve směru  $x$  rychlostí  $V = 0.9c$ . Pozorovatel v **S** vidí hvězdu pod úhlem  $\alpha = 60^\circ$ , který svírá spojnice hvězda-pozorovatel a osa  $x$ . Pod jakým úhlem bude hvězdu vidět pozorovatel v systému **S'**? Jak se situace změní bude-li  $V = 0.999999c$ ?

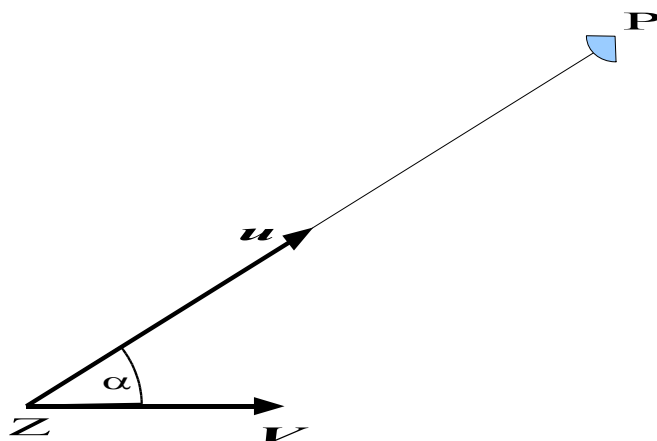
**1.6.2 Dopplerův jev**

Uvažujme zdroj periodického signálu o klidové periodě  $\delta T' = 1/\nu_0$ , který se pohybuje vůči pozorovateli v **S** rychlostí  $V$ . Rychlost šíření signálu  $u$  od zdroje k pozorovateli a rychlost  $V$  svírají úhel  $\alpha$  (viz obrázek 1-5). První jev, který se zde uplatní, je dilatace času. Perioda signálu je v systému **S** dána výrazem

$$\delta T = \frac{\delta T'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (1-37)$$

a tedy frekvence z pohledu systému **S** je

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (1-38)$$



Obrázek 1-5: Schéma k odvození Dopplerova jevu. Zdroj **Z** pohybující se rychlostí  $V$  vůči pozorovateli **P** emituje záření, které se šíří rychlostí  $u$ .

Nyní sledujme, jak se perioda  $\delta T$  mění v závislosti na směru rychlosti zdroje  $V$  vůči pozorovateli. Za periodu  $\delta T$  urazí signál rychlostí  $u$  vzdálenost  $\delta T u$ . Ovšem zdroj se k

pozorovateli přiblíží (nebo od něj vzdálí) o dráhu  $V\delta T \cos(\alpha)$ . Perioda signálu, kterou změří pozorovatel v S, nakonec je

$$\delta T_p = \frac{u \delta T - V \delta T \cos(\alpha)}{u} = \delta T \left( 1 - \frac{V}{u} \cos(\alpha) \right) = \delta T' \frac{\left( 1 - \frac{V}{u} \cos(\alpha) \right)}{1 - V^2/c^2} . \quad (1-39)$$

Pro frekvenci přijatého signálu nakonec dostáváme výraz

$$\nu_p = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - (V/u) \cos(\alpha)} . \quad (1-40)$$

Všimněme si, že v případě  $\alpha = \pi/2$ , je frekvence přijatého záření

$$\nu_p = \nu_0 \sqrt{1 - V^2/c^2} , \quad (1-41)$$

to znamená, že i v případě, kdy se zdroj pohybuje kolmo k pozorovateli, dojde k Dopplerovu efektu, který je dán „pouze“ časovou dilatací. Jedná se o tzv. *příčný Dopplerův jev*.

## 1.7 Relativistická dynamika

V předchozích kapitolách jsme představili relativistickou kinematiku. Ze základních principů jsme odvodili Lorentzovy transformace a důležité relativistické efekty, dilataci času a kontrakci délek. Nakonec jsme ukázali, jakým způsobem se relativisticky skládají rychlosti.

V této kapitole se budeme zabývat relativistickou dynamikou. Zajímá nás, jaký tvar budou mít 1. Newtonův zákon, zákon zachování energie a hybnosti.

### 1.7.1 První Newtonův zákon v relativistické dynamice

V klasické mechanice je inerciální systém identifikován tzv. *principem setrvačnosti*

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0} . \quad (1-42)$$

Pokud je rychlost v inerciálním systému S' konstantní, tak je, podle (1-29), konstantní i v dalším inerciálním systému S. 1. Newtonův zákon je invariantní vůči Lorentzově transformaci a do relativistické mechaniky přechází z klasické nezměněn.

### 1.7.2 Zákony zachování hybnosti

Nyní se zabývejme tím, jak vypadají zákony zachování v relativistické mechanice. Uvažujme následující myšlenkový pokus. V systému S' máme dvě tělesa, která se pohybují

podél osy  $x'$  proti sobě rychlostmi  $v'_1 = -u$ ,  $v'_2 = u$ . Po srážce, která je dokonale nepružná, zůstanou obě tělesa spolu a jejich společná rychlost je  $v' = 0$ . Z pohledu systému  $S$ , vůči kterému se  $S'$  pohybuje podél osy  $x$  rychlostí  $V$ , je situace následující. Rychlosti 1. a 2. tělesa před srážkou jsou podle (1-29) dány výrazy

$$v_1 = \frac{-u + V}{1 - uV/c^2} , \quad (1-43)$$

$$v_2 = \frac{u + V}{1 + uV/c^2} . \quad (1-44)$$

Po srážce mají obě tělesa společnou rychlost

$$v = V . \quad (1-45)$$

V klasické mechanice platí zákon zachování hybnosti při dokonale nepružné srážce a má tvar

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v , \quad (1-46)$$

přitom se předpokládá, že se zachovává celková hmotnost, tj.

$$m = m_1 + m_2 . \quad (1-47)$$

V soustavě  $S'$  mají obě tělesa stejnou hmotnost, podle klasické fyziky by stejnou hmotnost měli mít i v  $S$ . Použitím tohoto předpokladu v (1-46) zjistíme, že

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} , \quad (1-48)$$

což je ale v rozporu s (1-45). Nejjednodušší způsob, jak modifikovat zákon zachování hybnosti, je opustit předpoklad neměnné hmotnosti. Nyní nechť je  $m = m(V)$ . Z (1-46) spočítáme poměr  $m_1:m_2$  a dostáváme

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V - v_2}{v_1 - V} = \frac{1 - uV/c^2}{1 + uV/c^2} . \quad (1-49)$$

Všimněme si nyní, jak se transformuje gama faktor

$$\gamma_{vi} = \frac{1}{1 - v_i^2/c^2} , \quad (1-50)$$

kde  $i=1,2$ . Dosazením z (1-44) po úpravách dostáváme

$$\gamma_{vi} = \frac{1 + v'_i V/c^2}{\sqrt{(1 - V^2/c^2)(1 - v'^2_i/c^2)}} . \quad (1-51)$$

Protože je  $v'_1 = -u$  a  $v'_2 = u$ , získáme z (1-51) výrazy

$$\begin{aligned} 1 - uV/c^2 &= \frac{\gamma_{v_l}}{\gamma \gamma_u}, \\ 1 + uV/c^2 &= \frac{\gamma_{v_2}}{\gamma \gamma_u}. \end{aligned} \quad (1-52)$$

Dosazením (1-52) do (1-49) máme výraz

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}. \quad (1-53)$$

Pro  $v_l=0$  musí být  $m_l$  rovno klidové hmotnosti tělesa, kterou označíme  $m_0$ . Dostáváme tak výsledný výraz pro hmotnost druhé částice

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1-54)$$

kde už jsme vynechali index, protože za našich předpokladů musí mít tento vztah univerzální platnost. Srovnáme hmotnost částice vzniklé dokonale nepružnou srážkou s výsledkem klasické mechaniky, užitím (1-54) dostaneme výraz

$$M = m_1 + m_2 = 2m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (1-55)$$

což se liší od výsledku získaného nerelativisticky a který je

$$M = m_1 + m_2 = 2m_0. \quad (1-56)$$

Z toho lze usoudit, že v relativitě neplatí zákon zachování klidové hmotnosti.

Hybnost částice můžeme nyní psát ve tvaru

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1-57)$$

### 1.7.3 Zákon zachování energie

V dalším kroku je třeba formulovat v rámci relativistické mechaniky pohybové zákony. V klasické mechanice jsou pohybové zákony vyjádřeny 2. Newtonovým zákonem

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}. \quad (1-58)$$

V klasické mechanice můžeme psát (1-58) taky ve tvaru

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (1-59)$$

Výrazy (1-58) a (1-59), které jsou v klasické mechanice ekvivalentní, už nejsou ekvivalentní v teorii relativity. Výrazem (1-59) definujeme pojem síly v rámci teorie relativity. Nyní zavedme pojem energie do teorie relativity.

Přírůstek kinetické energie v klasické fyzice je dán výrazem

$$\frac{dE_k}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (1-60)$$

Předpokládejme, že tímto výrazem je dán taky přírůstek kinetické energie v teorii relativity. Potom užitím vztahů (1-54) a (1-59) dostáváme

$$dE_k = \mathbf{v} d\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v} d\mathbf{v}}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3} \quad (1-61)$$

Integrací tohoto výsledku dostáváme výraz

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + konst \quad (1-62)$$

Integrační konstantu *konst* určíme tak, aby pro  $v=0$  byla  $E_k=0$  a dostáváme

$$E_k = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (1-63)$$

Porovnejme nyní, užitím vzorce (1-55), hmotnosti částic před a po srážce, dostáváme výraz

$$M - 2m_0 = 2m_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right) = \frac{2E_k}{c^2} \quad (1-64)$$

odkud ihned vidíme, že se kinetická energie obou částic přeměnila na vnitřní energii vzniklé částice, čímž zvýšila klidovou hmotnost vzniklé částice. Můžeme předpokládat, že se jedná o projev univerzálního zákona a tedy, že klidová hmotnost a vnitřní energie jsou vzájemně svázány výrazem

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (1-65)$$

Celková energie částice tedy je

$$E = E_0 + E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 \quad (1-66)$$

Tento vztah vyjadřuje *zákon ekvivalence hmotnosti a energie*. Užitím výrazů (1-57) a (1-66) obdržíme vazbu mezi energií a hybností částice

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (1-67)$$

### 1.7.4 Relativistická transformace 2. Newtonova zákona

Vraťme se nyní k pohybovým rovnicím a odvodíme transformační vztah pro sílu. Z 2. Newtonova zákona (1-59) má výraz pro sílu působící ve směru  $x'$  tvar

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{dp'_x}{dt} \frac{dt}{dt'} \quad (1-68)$$

Hybnost se transformuje podle vztahu ( viz příklad 1-3 )

$$p'_x = \gamma(p_x - VE/c^2) \quad (1-69)$$

a derivováním (1-24) podle času  $t'$  dostaneme výraz

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma(1 + v'_x V/c^2) = \gamma^{-1}(1 - v_x V/c^2)^{-1} \quad (1-70)$$

Dosazením (1-69) a (1-70) do (1-68) a užitím

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z \quad (1-71)$$

nakonec dostaneme vztah

$$F'_x = F_x - \frac{V}{1 - v_x V/c^2} \frac{F_y v_y + F_z v_z}{c^2} \quad (1-72)$$

podobně zjistíme, že

$$F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1 - v_x V/c^2)} \quad (1-73)$$

a

$$F'_z = \frac{F_z}{\gamma(1 - v_x V/c^2)} \quad (1-74)$$

Zde jsme využili, že  $p'_y = p_y$  a  $p'_z = p_z$  (viz samostatný úkol 1-3).



**ŘEŠENÁ ÚLOHA 1-3**

Ukažte, že se komponenta hybnosti ve směru osy  $x$  transformuje podle vztahu (1-48).

Řešení:

Podle vztahu (1-36) můžeme psát

$$p'_x = \frac{m_0 v'_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \quad (1-75)$$

Protože se systém  $S'$  pohybuje vzhledem k  $S$  podél osy  $x$ , je  $v' = v'_x$ . Dosazením této rovnosti a vztahu (1-20) do (1-54) dostáváme

$$p'_x = \frac{m_0(v_x - V)}{1 - V v_x/c^2} \left( 1 - \frac{1}{c^2} \frac{(v_x - V)^2}{(1 - V v_x/c^2)^2} \right)^{-1/2} \quad (1-76)$$

Odtud po úpravách a s využitím (1-45) dostaneme výsledek

$$p'_x = \gamma(p_x - V E/c^2) \quad (1-77)$$

**SAMOSTATNÝ ÚKOL 4**

Nechť se systém  $S'$  pohybuje vůči systému  $S$  rychlostí  $V$  ve směru osy  $x$ . Nechť se částice pohybuje vůči  $S'$  s hybností  $\mathbf{p}'$ . Ukažte, že se komponenta hybnosti  $p'_y$  transformuje podle vztahu



## ŘEŠENÁ ÚLOHA 1-4

Určete trajektorii nabité částice v homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B}=(0,0,B)$ . Omezme se na pohyb v rovině  $x$ - $y$ .

*Řešení:*

*V magnetickém poli s indukcí  $\mathbf{B}$  působí na částici s nábojem  $e$ , který se pohybuje rychlostí  $\mathbf{v}$  síla*

$$\mathbf{F} = e \mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (1-78)$$

*Z (1-48) a (1-67) sestavíme následující pohybové rovnice*

$$\frac{dp_x}{dt} = e v_y B , \quad (1-79)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -e v_x B , \quad (1-80)$$

$$\frac{dp_z}{dt} = 0 . \quad (1-81)$$

*Z poslední rovnice plyne, že  $p_z = \text{konst}$  a tedy ve směru osy  $z$  se bude pohybovat rovnoměrně. Dále se proto omezíme pouze na rovinu  $x$ - $y$ . V relativistické dynamice pro hybnost částice platí*

$$\mathbf{p} = m_0 \gamma_v \mathbf{v} , \quad (1-82)$$

*takže postup není (alespoň na první pohled) přímočarý jako v klasické dynamice. Postupujme následovně. Vynásobíme rovnici (1-68)  $v_y$  a rovnici (1-69) vynásobíme  $v_x$  a poté obě rovnice sečteme, čímž získáme výraz*

$$v_x \frac{dp_x}{dt} + v_y \frac{dp_y}{dt} = eB(v_x v_y - v_y v_x) = 0, \quad (1-83)$$

pravá strana rovnice se ovšem rovná  $\mathbf{F}\mathbf{v}=0$  (síla je kolmá na rychlost a tedy nekoná práci). Ale z (1-60) máme, že

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0 \Rightarrow \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \text{konst} \quad (1-84)$$

a tedy  $m=\text{konst}$ . Odtud již vidíme, že v tomto případě bude hledání řešení rovnic (1-68) a (1-69) analogické hledání řešení v klasické dynamice. Dostáváme tedy rovnice

$$m \frac{dv_x}{dt} = e v_y B \rightarrow \frac{dv_x}{dt} = k v_y, \quad (1-85)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -e v_x B \rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -k v_x. \quad (1-86)$$

Derivováním (1-74) podle času a dosazením z (1-75) (a naopak) dostáváme rovnice

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -k^2 v_y \quad (1-87)$$

a

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -k^2 v_x, \quad (1-88)$$

kde je  $k = \frac{eB}{m}$ . Rovnice (1-76) a (1-77) představují rovnice harmonického oscilátoru s řešením

$$v_y = A_y \sin(\omega t) + B_y \cos(\omega t), \quad (1-89)$$

a

$$v_x = A_x \sin(\omega t) + B_x \cos(\omega t). \quad (1-90)$$

Dosazením těchto výsledků zpět do (1-76) a (1-77) zjistíme, že  $k=\omega$ . Z počátečních podmínek  $v_x(t=0)=0$  a  $v_y(t=0)=v$  a z podmínky  $v_x(t=\pi/(2\omega))=v$  a  $v_y(t=\pi/(2\omega))=0$  dostáváme rovnice

$$v_x = v \sin(\omega t), \quad (1-91)$$

$$v_y = v \cos(\omega t) \quad . \quad (1-92)$$

*Integrací těchto rovnic už dostaneme rovnice*

$$y = -\frac{mv}{eB} \sin(\omega t) \quad a \quad x = \frac{mv}{eB} \cos(\omega t) \quad . \quad (1-93)$$

*Výslednou trajektorii je kružnice s poloměrem  $mv/(eB)$  . Oproti klasickému případu je zde navíc nenulový faktor  $\gamma$  , ukrytý v  $m$  (  $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$  ). Kružnice budou mít větší poloměr než v nerelativistickém přístupu.*

## SHRNUTÍ KAPITOLY



V rámci speciální teorie relativity jsou čas a prostor neoddělitelné entity. Dozvěděli jsme se, že rychlost světla je stejná ve všech inerciálních systémech a z principu kauzality vyplynulo, že je to taky mezní rychlost, kterou se může šířit jakýkoliv signál. Délka časového intervalu a změřená délka závisí na pohybu pozorovatele – dilatace času a kontrakce délky. Ukázali jsme, že součet velikostí rychlostí srážejících se částic bude vždy menší než rychlost světla – relativistické skládání rychlostí. Odvodili jsme relativistický Dopplerův efekt a zjistili, že je nenulový i v případě, že zdroj se pohybuje kolmo na směr šíření signálu. Nakonec jsme ukázali, jak zavést pojem síly do relativistické mechaniky a ukázali jsme, že každý hmotný objekt má nenulovou klidovou energii danou výrazem  $E=mc^2$ .

## 2 OBECNÁ TEORIE RELATIVITY [6][7]



### **RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY**

V této kapitole se dozvíme, jaké důvody vedly k hledání nové teorie gravitace. Popíšeme princip ekvivalence a princip obecné kovariance. Popíšeme, jak určit, zda je prostoročas zakřivený nebo plochý. Nakonec vysvětlíme, jak hmota, resp. její rozložení, deformuje prostoročas.



### **CÍLE KAPITOLY**

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- popsat Eötvösův experiment,
- princip ekvivalence a princip obecné kovariance,
- určit zda je prostor zakřivený nebo plochý,
- popsat jak hmota deformuje prostoročas,
- odvodit gravitační rudý posuv v homogenním gravitačním poli



### **KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY**

relativita, gravitace, geometrie

Začneme tuto kapitolu tvrzením, že Newtonova teorie gravitace není kompatibilní se speciální teorií relativity. Newton totiž tvrdí, že mezi libovolnými dvěma hmotnými

částicemi působí síla, která je úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti. Když mluví Newton o vzdálenosti, myslí tím vzdálenost objektů v daném čase: v jeho pojetí absolutního času to, co je současné pro jednoho pozorovatele, je současné i pro kteréhokoliv jiného. Ale to je chyba. Už jsme zjistili, že podle STR platí, že co je pro jednoho pozorovatele současné, pro jiného pozorovatele současné být nemusí. Pojem „vzdálenost v daném čase“ závisí na pozorovateli. Jinými slovy různí pozorovatelé změří různé vzdálenosti.

Pojem absolutní současnosti souvisí s Newtonovým konceptem nekonečné rychlosti šíření interakcí. Ovšem podle speciální teorie relativity je mezní rychlostí, jakou se může šířit jakýkoliv signál, rychlost světla.

Albert Einstein vybudoval úplně nový koncept gravitace, ve kterém je gravitační síla nahrazena geometrickými objekty, které popisují, jak se prostoročas deformuje vlivem hmotných objektů.

Postuloval dva základní principy, ze kterých následně odvodil své rovnice gravitačního pole.

### 2.1.1 Princip ekvivalence

Princip ekvivalence je založen na rovnosti gravitační a setrvačné hmotnosti. Totiž v rovnici popisující Newtonův gravitační zákon pro homogenní gravitační pole (u Země)

$$F_g = m_g g \quad (2-1)$$

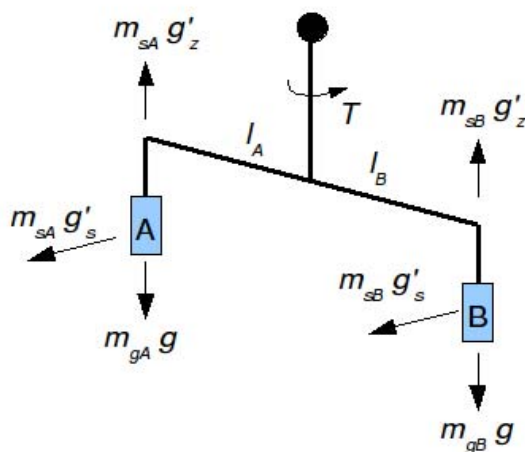
vystupuje gravitační hmotnost. Změřím-li sílu  $F_g$ , kterou působí Země na testované těleso, můžu z (2-1) určit jeho gravitační hmotnost. Naproti tomu ve 2. Newtonově zákonu síly

$$F = m_s a \quad (2-2)$$

vystupuje vedle zrychlení  $a$  tzv. setrvačná hmotnost. Tuto hmotnost určíme z dynamických účinků síly  $F$  na těleso. Ze známé síly  $a$  ze změřeného zrychlení určíme hmotnost ze vztahu (2-2). Nyní nás zajímá, s jakým zrychlením budou v gravitačním poli Země tělesa padat. Ze vztahů (2-1) a (2-2) zjistíme, že

$$a = \frac{m_g}{m_s} g \quad (2-3)$$

Pokud bude poměr hmotností  $m_g/m_s$  různý pro různá tělesa, pak budou padat s různým zrychlením. Galileo při takových pokusech dospěl k závěru, že tento poměr nezávisí na hmotnostech těles. Roland Eötvös ve svém experimentu ukázal, že rozdíl mezi  $m_g/m_s$  pro dřevo a platinu byl menší než  $10^{-9}$ . Jeho experiment byl následující. Na opačné konce 40 cm trámečku zavěsil závaží A a B. Ten byl ve středu zavěšen na tenkém drátu. V rovnováze pro trámeček platí



Obrázek 2-1: Eötvösův experiment.

$$l_A (m_{gA} g - m_{sA} g'_z) = l_B (m_{gB} g - m_{sB} g'_z) , \quad (2-4)$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení a  $g'_z$  je vertikální komponenta centrifugálního zrychlení v důsledku rotace Země. Silový moment, kterým působí centrifugální síla na trámeček je

$$T = l_A m_{sA} g'_s - l_B m_{sB} g'_s . \quad (2-5)$$

Když vyjádříme  $l_A$  z rovnice pro rovnováhu (2-4) a dosadíme do (2-5), dostaneme rovnici

$$T = l_A m_{sA} g'_s \left[ 1 - \left( \frac{m_{gA}}{m_{sA}} - g'_z \right) \left( \frac{m_{gB}}{m_{sB}} - g'_z \right)^{-1} \right] . \quad (2-6)$$

Protože je  $g'_z \ll g$ , pak můžeme pro silový moment psát výraz



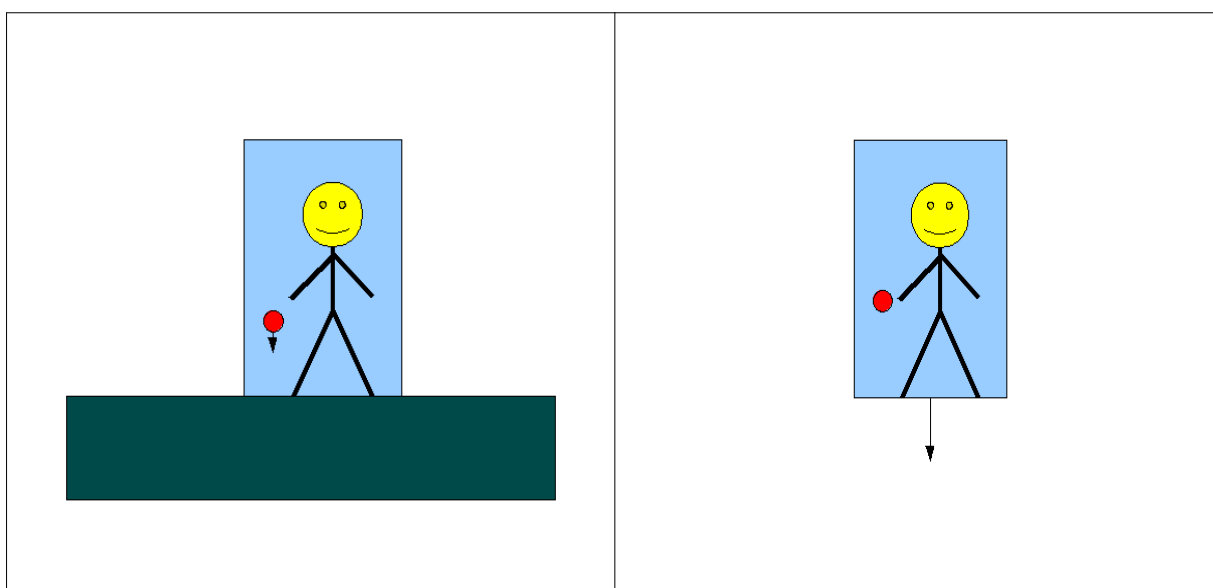
$$T = l_A g'_s m_{gA} \left[ \frac{m_{sA}}{m_{gA}} - \frac{m_{sB}}{m_{gB}} \right] . \quad (2-7)$$

Bude-li silový moment  $T$  nenulový, pak by to znamenalo, že poměry

$$\frac{m_{sA}}{m_{gA}} \neq \frac{m_{sB}}{m_{gB}} . \quad (2-8)$$

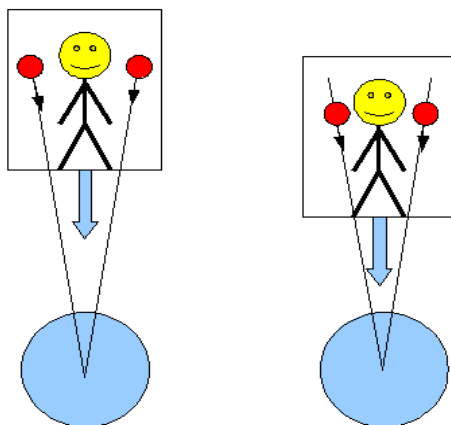
Ovšem Eötvös změřil s velkou přesností, že  $T = 0$ .

Je-li setrvačná a gravitační hmota stejná, tak to znamená, že v homogenním gravitačním poli budou všechna tělesa padat stejně rychle bez ohledu na jejich hmotnost (plyne ihned z (2-7)). Z toho Einstein vyvodil, že žádné externí, homogenní gravitační pole nemůže být zaznamenáno uvnitř volně padajícího výtahu.



Obrázek 2-2: Vlevo: výtah stojící na zemi. Jablko padá k podlaze výtahu. Pravo: výtah padá v homogenním gravitačním poli. Jablko se vůči stěnám výtahu nepohybuje.

Nyní si všimněme, co se bude dít, když necháme volně padat výtah v radiálním gravitačním poli. Když pozorovatel ve výtahu upustí dvě jablka, tak zjistí, že se začnou pohybovat směrem k sobě. To je dáno tím, že obě jablka sledují svůj radiální směr. Obě radiální trajektorie se sbíhají ve středu Země, a proto se v systému spojeném s výtahem pohybují směrem k sobě. V tomto případě se účinky gravitačního pole nepodaří odstranit volně padajícím systémem.



Obrázek 2-3: Volně padající výtah.

Pokud se ovšem zaměříme na malou oblast gravitačního pole, která je homogenní, tak v té oblasti je možné v daném okamžiku gravitační pole odstínit.

Princip ekvivalence má potom následující podobu: *v každém prostoročasovém bodě v libovolném gravitačním poli můžeme vybrat „lokálně inerciální souřadný systém“ tak, že v dostatečné oblasti bodu mají přírodní zákony stejný tvar jako ve speciální teorii relativity (tj. v inerciálním systému při absenci gravitace).*

### 2.1.2 Princip obecné kovariance

Princip obecné kovariance říká, že fyzikální rovnice platí v obecném gravitačním poli, pokud jsou splněny dvě podmínky:

1. Rovnice platí v případě absence gravitace; tj., souhlasí se zákony speciální teorie relativity.
2. Rovnice jsou obecně kovariantní; tj., zachovává se tvar rovnic při obecné souřadnicové transformaci.

Princip obecné kovariance z principu ekvivalence. Předpokládejme, že jsme v libovolném gravitačním poli. Vezměme si libovolnou rovnici, která splňuje obě podmínky obecné kovariance. Potom z podmínky 2 plyne, že rovnice bude platit ve všech souřadných systémech, pokud platí alespoň v jednom. Ale v libovolném daném bodě existuje třída souřadných systémů, lokálně inerciálních systémů, ve kterých je gravitace nulová. Z

podmínky 1 potom plyne, že naše rovnice platí v těchto systémech, a proto platí i ve všech ostatních.

### 2.1.3 Křivočará geometrie

Představme-si, že žijeme na dvourozměrném povrchu a chceme zjistit, jestli je plochý anebo zakřivený. Uděláme následující měření. Vybavíme měřiče tuhými ocejchovanými tyčemi a necháme je vyrazit radiálním směrem od vybraného místa. Po odměření  $R$  délek měřící tyče vztyčí na daném místě značku a vrátí se do výchozího bodu. Svůj nový výchozí směr pootočí o malý úhel  $d\theta$  a opět vyrazí po nové radiále odměřit  $R$  délek měřící tyče. Takto postupuje, dokud není celkový úhel  $\theta = 360$ . Poté se vypraví k jedné ze značek a měří délku obvodu od jedné značky ke druhé, až opět dorazí k výchozí značce. Délku takto získaného obvodu označme  $L$ . Z těchto informací už budeme schopni určit, jestli je geometrie prostoru v okolí zvoleného bodu Eukleidovská nebo zakřivená. Z radiální vzdálenosti  $R$  spočítáme veličinu

$$L' = 2\pi R, \quad (2-9)$$

což je obvod kružnice v Eukleidovském prostoru. Bude-li  $L = L'$ , tak v okolí vybraného bodu bude prostor Eukleidovský a v opačném případě bude zakřivený. Kdybychom žili na dvourozměrné sféře, tak by  $L < L'$ .

### 2.1.4 Einsteinovy rovnice gravitačního pole

Albert Einstein si při hledání nové teorie gravitace všiml důležité koincidence mezi principem ekvivalence a vlastnostmi Riemannovy geometrie. Totiž, v okolí libovolného bodu na zakřivené ploše lze zřídit Kartézský systém. Princip ekvivalence zase říká, že lze v daném bodě kdykoliv přejít do lokálně inerciálního systému a tam formulovat rovnice jako v inerciálním systému daleko od hmotných těles. Tyto všechny úvahy nakonec vedly Einsteina k formulování nového gravitačního zákona ve tvaru

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2-10)$$

Jedná se o tenzorovou rovnici, kde na levé a pravé straně vystupují tenzory druhého řádu. Levá strana této rovnice popisuje geometrii prostoročasu v daném bodě a pravá strana představuje rozložení hmoty v daném bodě. Tato rovnice říká, jakým způsobem se má geometrie deformovat.

### 2.1.5 Gravitační rudý posuv

Deformaci času si ilustrujeme na následujícím myšlenkovém experimentu. Postavíme věž do výšky  $h$ . U paty věže uložíme zařízení, které přemění dokonale hmotu na záření, a na vrcholku věže bude zařízení, které přeměňuje záření na hmotu. Teď vezmeme částici o hmotnosti  $m$  a pustíme ji z vrcholku věže. Částice dopadne na zařízení, které veškerou její

energii přemění na záření, které putuje zpět k vrcholku věže, kde zasáhne druhé zařízení, které veškerou energii tohoto fotonu přemění na částici s hmotností  $m'$ . Spočítejme, jaká je energetická bilance tohoto procesu.

Částice má po dopadu do zařízení u paty věže energii

$$E = mgh + mc^2 \quad . \quad (2-11)$$

Energie fotonu potom je

$$h\nu = mgh + mc^2 \quad . \quad (2-12)$$

Když je posléze tento foton na vrcholu věže přeměněn zpět na částici, bude mít tato částice hmotnost

$$m' = h\nu / c^2 \quad (2-13)$$

Tento výsledek ovšem porušuje 2. termodynamický zákon. Tento výsledek spolu s (2-12) totiž znamená, že

$$m' = m + mgh/c^2 > m \quad . \quad (2-14)$$

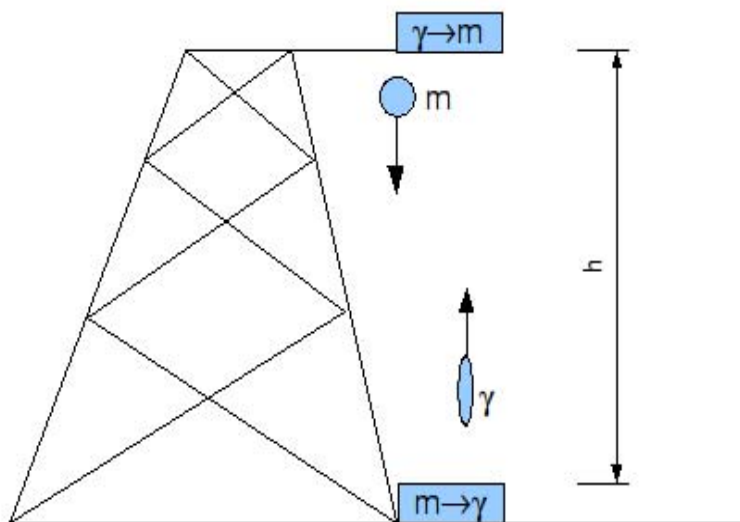
V nejlepším případě může být  $m'=m$ , to ale znamená (z (2-12)), že se musí změnit frekvence fotonu, jak postupuje od paty věže k jejímu vrcholu, tj. musí platit

$$m = h\nu' / c^2 \quad . \quad (2-15)$$

Srovnáním vztahů (2-15) a (2-14) dostaneme výsledek

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1 + gh/c^2} < 1 \quad . \quad (2-16)$$

Tento myšlenkový pokus byl potvrzen i experimentálně. Toto rudnutí fotonu při překonávání gravitačního potenciálu je důsledkem fundamentálního jevu dilatace času v blízkosti hmotných těles, tj. deformace času hmotnými tělesy.



Obrázek 2-4: Rudý posuv v gravitačním poli.

## SHRNUTÍ KAPITOLY



Dozvěděli jsme se, že nekompatibilita Newtonovy teorie gravitace se speciální teorií relativity vedla k formulaci obecné teorie relativity. Byly formulovány dva principy,

princip obecné kovariance a princip ekvivalence. Na Eötvösovém experimentu jsme demonstrovali ekvivalenci setrvačné a gravitační hmotnosti. Popsali jsme způsob, jak určit zda je prostor křivočarý nebo plochý. Napsali jsme Einsteinovy rovnice gravitačního pole popisující, jak rozložení hmoty deformuje geometrii prostoročasu. Nakonec jsme na myšlenkovém pokusu demonstrovali gravitační rudý posuv, který odráží deformaci času v gravitačním poli.

### 3 KVANTOVÁ MECHANIKA [2][8]

#### RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY



V této kapitole nejprve uvedeme fyzikální jevy, které byly vysvětleny až na základě kvantověmechanických principů: fotoelektrický jev, Comptonův efekt, Ritzovo kombinační pravidlo, výsledky Franckova-Hertzova experimentu, výsledky Stern-Gerlachova experimentu. Ukážeme jak Max Planck odvodil zákon vyzařování absolutně černého tělesa (AČT). Zmíníme Rayleighův-Jeansův, Wienův a Planckův vyzařovací zákon. Zavedeme energii kvanta elektromagnetického záření. Vysvětlíme vlnově-částicový dualismus – korpuskulární vlastnosti elektromagnetických vln a vlnové vlastnosti hmotných částic. Popíšeme vlnovou funkci částic a její interpretace. Popíšeme Schrödingerovu rovnici a ukážeme Heisenbergovy relace neurčitosti.

#### CÍLE KAPITOLY



Po prostudování této kapitoly budete umět:

- znát některé experimenty, které bylo možné vysvětlit až na základě kvantově-mechanické hypotézy,
- odvodit Planckův vyzařovací zákon,
- přiřadit vlně částicové vlastnosti (např. hybnost), částici vlnové vlastnosti (např. vlnovou délku)
- Schrödingerovu rovnici (nerelativistickou pohybovou rovnici) , která řídí vývoj vlnové funkce, charakterizující částici,
- Heisenbergovy relace neurčitosti a jejich důsledky.



#### KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY

hybnost, energie, foton, částice, vlnová funkce, neurčitost



#### 3.1 Začátky kvantové mechaniky

Začátky kvantové mechaniky se datují na začátek 20. století. V té době prodělávala klasická mechanika krizi. V jejím rámci nebylo možno vysvětlit výsledky celé řady experimentů týkajících se struktury látky a vlastností elektromagnetického záření. V této

kapitole uvedeme experimenty a pozorování, které vedly ke krizi klasické mechaniky a potažmo k formulování kvantově-mechanické hypotézy.

### 3.1.1 Záření absolutně černého tělesa (AČT)

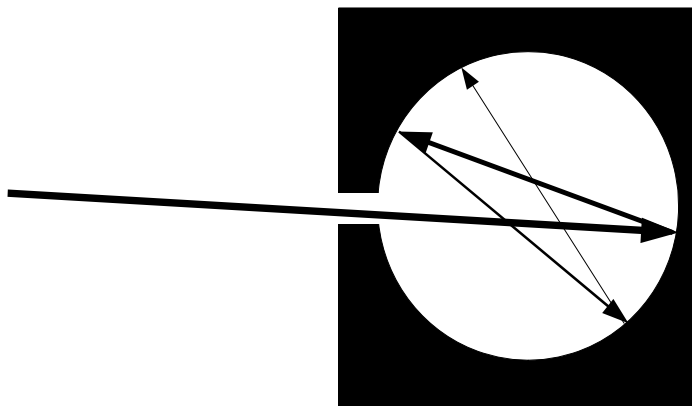


Obrázek 3-1: Max Planck (\*1858 - +1947)

AČT je ideální těleso, které pohltí veškeré dopadající záření. Takové těleso je v laboratorních podmínkách modelováno nádobou s vyvrtaným otvorem, uvnitř které je dutina tvaru koule nebo kužele (Obrázek 3-1). Záření, které otvorem projde dovnitř, je po několikanásobných odrazech pohlceno stěnami nádoby, a proto se nám navenek zdá, že má černou barvu (za jasného dne se otevřené okno jeví černé, i když je místnost namalována na bílo). Na záření uvnitř dutiny můžeme nahlížet jako na plyn v tepelné rovnováze se stěnami nádoby (co se pohltí se taky vyžáří). Tomuto plynu můžeme přisoudit teplotu  $T$ .

Otvorem můžeme sledovat, jaké má toto záření vlastnosti. Charakteristické spektrum záření AČT je vyobrazeno na obrázku 3-2.





Obrázek 3-2: Model AČT. Nádoba s kulovou dutinou a otvorem. Záření dopadající otvorem do dutiny je po několikanásobných odrazech pohlceno stěnami tělesa. Stěny do dutiny zpět vyzařují záření (je udržována tepelná rovnováha mezi zářením v dutině a stěnami).

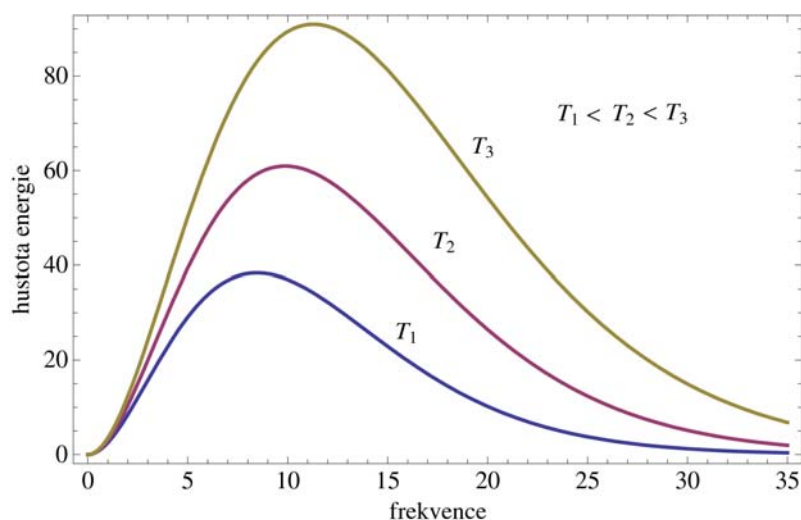
Snahy vysvětlit tento vyzařovací zákon klasicky vedly k problémům. John Rayleigh, James Jeans a Wilhelm Wien na základě klasických úvah došli k výsledkům

$$\varrho_{R-J} = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \omega^2, \quad (3-1)$$

$$\varrho_W = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \exp(-\hbar \omega / k_B T). \quad (3-2)$$

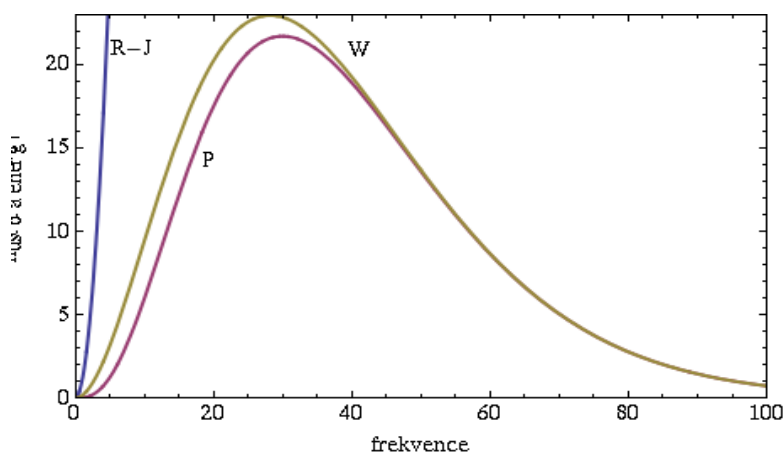
Zatímco Planck na základě kvantových úvah dospěl k výsledku

$$\varrho_P = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1}. \quad (3-3)$$



Obrázek 3-3: Spektrum záření AČT pro tři reprezentativní hodnoty teploty  $T$ .

Planckův vyzařovací zákon přesně modeluje experimentálně obdržený vyzařovací zákon, zatímco Rayleigh – Jeansův platí pouze v oblasti velmi malých frekvencí a ve vyšších úplně selhává (ultrafialová katastrofa). Naproti tomu Wienův zákon vyzařování funguje v oblasti vysokých frekvencí, ale selhává v nízkých (infračervená katastrofa) (Obrázek 3-3). Oba tyto zákony jsou limitním případem Planckova vyzařovacího zákona.



Obrázek 3-4: Distribuce hustoty energie vyzařování pro tři zákony vyzařování: Rayleigh-Jeans (R-J), Wien (W), Planck (P).

Nyní se pokusíme naznačit, jaké úvahy vedly Plancka k nalezení správného zákona vyzařování. Mějme kavitu, jejíž stěny jsou tvořeny AČT o teplotě  $T$ . Záření uvnitř kavity je v tepelné rovnováze s jejími stěnami. Toto záření je izotropní, homogenní a nepolarizované. Nechť je jeho hustota energie  $E/V$ , kde  $V$  je objem uvnitř kavity. Spektrální hustotu energie pak definujeme vztahem

$$\frac{E}{V} = \int \varrho(\omega, T) d\omega. \quad (3-4)$$

Energie záření uvnitř kavity lze interpretovat jako energii elektromagnetického pole. Frekvence, které se zde vyskytují, jsou vlastní oscilace tohoto pole. Definujme počet vlastních oscilací pole ve frekvenčním rozsahu  $d\omega$  výrazem

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} d\omega, \quad (3-5)$$

dále, necht' je  $\bar{\epsilon}(\omega, T)$  střední energie vlastních oscilací o frekvenci  $\omega$  a teplotě  $T$ . Potom je energetický obsah kavity ve frekvenčním intervalu  $d\omega$  dán vztahem

$$V \varrho(\omega, T) d\omega = \frac{dN(\omega)}{d\omega} \bar{\epsilon}(\omega, T) d\omega \quad (3-6)$$

a tedy

$$\varrho(\omega, T) d\omega = \frac{1}{V} \frac{dN(\omega)}{d\omega} \bar{\epsilon}(\omega, T) d\omega. \quad (3-7)$$

Protože má výraz pro počet vlastních oscilací tvar

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2, \quad (3-8)$$

dosazením do (3-7) dostáváme

$$\varrho(\omega, T) = \frac{1}{\pi^2 c^3} \omega^2 \bar{\epsilon}(\omega, T). \quad (3-9)$$

Až do tohoto okamžiku je postup odvození vyzařovacího zákona stejný s R-J postupem. Planck si však, na rozdíl od svých kolegů, představoval elektromagnetické pole v kavitě jako systém harmonických oscilátorů. Energie těchto oscilací se nemění spojitě, ale je úměrná celočíselnému násobku minimálního kvanta energie

$$\epsilon_n = n \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3-10)$$

kde  $\hbar$  je konstanta, která byla později pojmenována po Maxu Planckovi.

Střední energie systému v tepelné rovnováze je

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_n \epsilon_n \exp(-\epsilon_n/k_B T)}{\sum_n \exp(-\epsilon_n/k_B T)} \quad (3-11)$$

Zavedením ekvipartiční sumy

$$Z = \sum_n \exp(-\beta \epsilon_n); \quad \beta = 1/k_B T, \quad (3-12)$$

dostáváme výraz

$$\bar{\epsilon} = -\frac{d}{d\beta} \ln Z. \quad (3-13)$$

Vyčíslení ekvipartiční sumy získáme vztah

$$Z = \frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega)} \quad (3-14)$$

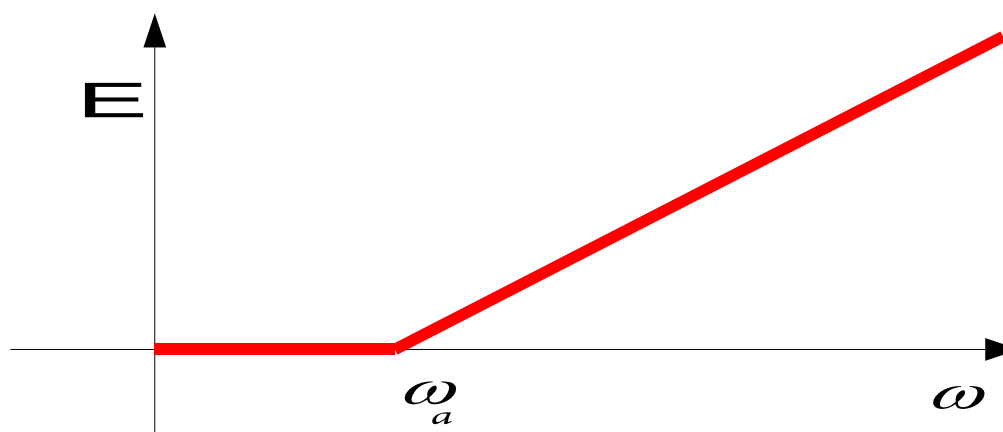
který společně s (2-9) a (2-13) dostáváme *Planckův vyzařovací zákon* ve tvaru

$$\varrho(\nu, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar \omega/k_B T) - 1} \quad (3-15)$$

### 3.1.2 Fotoelektrický efekt

Philipp Lenard ve svém experimentu, při kterém ozařoval povrch kovu monochromatickým zářením o frekvenci  $\omega$ , zjistil, že jsou z kovu uvolňovány elektrony  $e^-$ . Zvyšováním intenzity je z kovu uvolněno víc elektronů, ale nezmění se jejich energie. Dále zjistil, že elektrony jsou z kovu emitovány až od určité hraniční hodnoty frekvence  $\omega_a$  použitého záření (obr 2-4). Velikost této hraniční hodnoty  $\omega_a$  závisí na druhu ozařovaného kovu. Energie  $E$  vyraženého elektronu potom je

$$E = \hbar(\omega - \omega_a) \quad (3-16)$$



Obrázek 3-5: Závislost energie,  $E$ , uvolněného elektronu z kovu na frekvenci  $\omega$  použitého záření.

Albert Einstein přišel s následujícím vysvětlením tohoto efektu postulováním diskrétního kvanta energie záření (fotonu)  $\hbar\omega$ . Zvyšováním intenzity použitého záření se zvyšuje i počet fotonů, které vyražejí elektrony z povrchu kovu, tj. zvýšení počtu vyražených elektronů. Elektrony jsou vázány v kovu s jistou energií, která odpovídá mezní hodnotě energie fotonu  $\hbar\omega_a$ , od které nastává fotoefekt.

### 3.1.3 Comptonův efekt

Při rozptylu záření X na elektronech je pozorován posun ve frekvenci záření. Velikost tohoto jevu závisí na úhlu rozptylu  $\theta$  (Obrázek 3-6). Tento jev byl vysvětlen na základě fotonového obrazu záření X Arthurem Comptonem a Peter Debye. Za předpokladu, že je energie záření kvantována, můžeme napsat zákon zachování energie systému foton-elektron ve tvaru

$$\hbar\omega + m_e c^2 = \hbar\omega' + m_e c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (3-17)$$

kde levá strana rovnice reprezentuje celkovou energii před srážkou a pravá strana celkovou energii po srážce. Hybnost fotonu určíme z Einsteinova vztahu pro energii částice

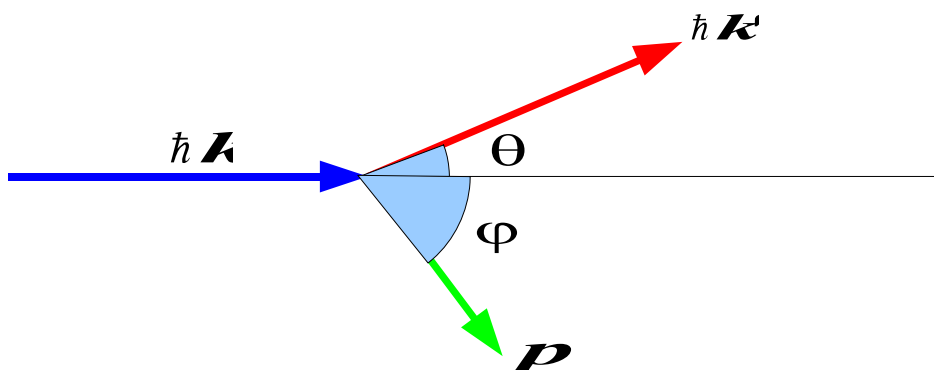
$$E^2 = (mc^2)^2 + p^2 c^2 \quad (3-18)$$

V případě fotonu je  $m=0$  a tedy nakonec dostáváme

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k. \quad (3-19)$$

Nyní můžeme zapsat i zákon zachování hybnosti tohoto systému ve tvaru

$$\hbar \vec{k} = \hbar \vec{k}' + \frac{m_e \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} . \quad (3-20)$$



Obrázek 3-6: Comptonův efekt. Foton (modrý vektor) naráží do elektronu, který je v klidu. Po nárazu je foton odchýlen z původního směru, nyní reprezentován červeným vektorem a elektron získává nenulovou hybnost a pohybuje se ve směru naznačeném zeleným vektorem.

Projekcí rovnice (3-20) do směrů  $x$  a  $y$  dostaneme dvě následující rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\hbar \omega}{c} &= \frac{\hbar \omega'}{c} \cos(\theta) + \frac{m_e v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cos(\phi), \\ 0 &= \frac{\hbar \omega'}{c} \sin(\theta) - \frac{m_e v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \sin(\phi). \end{aligned} \quad (3-21)$$

Což nám v důsledku dá výsledek

$$\omega - \omega' = \frac{2\hbar}{m_e c^2} \omega \omega' \sin^2(\theta/2) . \quad (3-22)$$

**ŘEŠENÁ ÚLOHA 3-1**

Ukažte, že nemůže proběhnout fotoefekt na volném elektronu.

Řešení:

Studujme situaci z pohledu systému, ve kterém je před srážkou elektron v klidu a po srážce necht' se foton i elektron pohybují ve směru osy  $x$  tohoto systému. Ze zákona zachování energie a hybnosti dostáváme

$$\begin{aligned} mc^2 &= \hbar \omega + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \\ 0 &= \frac{\hbar \omega}{c} + \frac{mV}{1 - V^2/c^2}. \end{aligned} \quad (3-23)$$

Odečtením obou rovnic a řešením vzhledem k  $V$  zjistíme, že v takovém případě by rychlost elektronu po srážce byla

$$V = c. \quad (3-24)$$

Takové rychlosti ovšem nemohou žádné hmotné částice dosáhnout, jak bylo ukázáno v kapitole věnované speciální teorii relativity. Takový jev tedy nemůže nastat.

### 3.1.4 Bohrov model atomu

Rutherford při zkoumání rozptylu  $\alpha$ -částic na atomech dospěl na základě výsledků tohoto experimentu k závěru, že se atomy skládají z kladně nabitého jádra, kolem kterého putují elektrony. Byl vytvořen tzv. planetární model atomu, podle kterého obíhají elektrony kolem jádra po kružnicích. Z výsledků elektrodynamiky ovšem plyne, že nabitá částice pohybující se zrychleně musí vyzařovat elektromagnetické vlny a tudíž ztrácet v poli jádra energii. Detailní výpočty ukazují, že by takový atom zkolaboval v řádu pikosekund. Ale protože tento jev v přírodě nepozorujeme (celý Vesmír se hemží atomy), je zřejmé, že si klasická fyzika s existencí atomů neumí poradit a je nutno hledat teorii, v rámci které budou existovat stabilní atomy.

Niels Bohr navrhl teorii, kterou shrneme do následujících tří postulátů:

1. elektrony se pohybují kolem jádra po drahách, které splňují kvantovací podmínku

$$\oint p dq = n h, \quad n=1,2,3,\dots, \quad (3-25)$$

kde  $p$  a  $q$  jsou kanonicky sdružená hybnost a souřadnice. Zde integrujeme přes cyklický pohyb ve fázovém prostoru. V případě více než jednoho stupně volnosti se tato podmínka uplatňuje na každý zvlášť.

2. Takto vybrané stavy jsou stabilní stacionární stavy, ve kterých nedochází k výše zmíněnému kolapsu.
3. Frekvence vyzářeného (pohlčeného) záření při přechodu na nižší (vyšší) energetickou hladinu je

$$\omega_{mn} = \frac{|E_m - E_n|}{\hbar}, \quad (3-26)$$

kde  $E_m$  ( $E_n$ ) je energie výchozího (konečného) stavu.

Pro atom vodíku dostal Bohr energie

$$E_n = -\frac{1}{n^2} Ry, \quad n=1,2,3,\dots, \quad (3-27)$$

kde  $1 Ry \approx 2,1799 \times 10^{-18} \text{ J} = 13,605 \text{ eV}$  je jeden Rydberg. Tento výsledek je v souladu s Ritzovým kombinačním principem, podle kterého lze spektroskopicky pozorované absorpční nebo emisní čáry (frekvence) atomů popsat vztahem

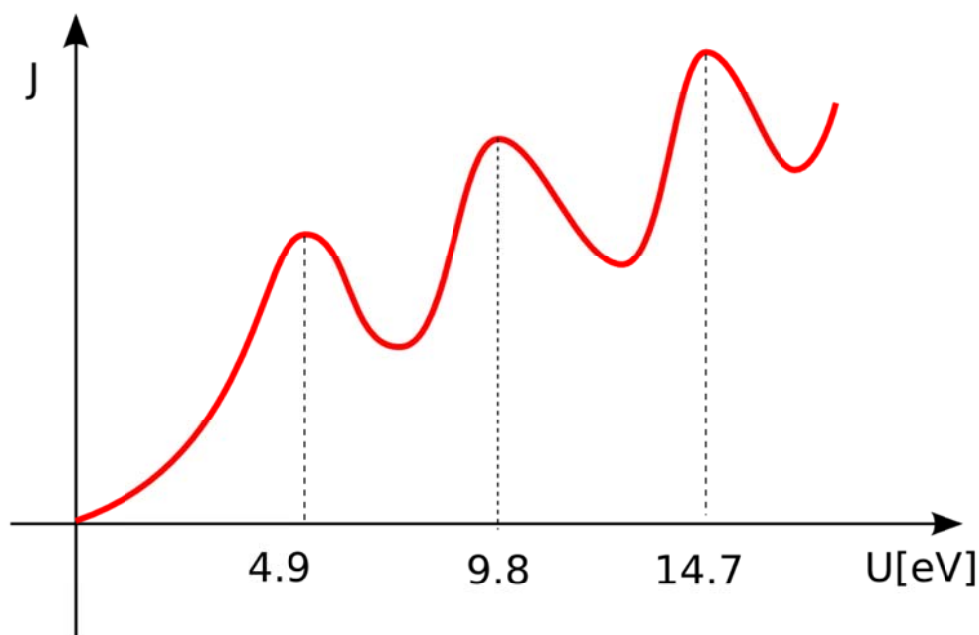
$$\nu_{nm} = c R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (3-28)$$

Bohrova teorie funguje pouze v případě atomu vodíku, kde přesně popisuje všechny jeho možné energetické stavy. V případě složitějších atomů naprosto selhává.

### 3.1.5 Franckův – Hertzův experiment

Mějme triodu naplněnou rtuťovými parami. Elektrony jsou urychlovány akceleračním napětím  $U$  mezi katodou K a anodou A, která je tvořena mřížkou, aby nakonec dorazily k elektrodě Z. Mezi elektrodou Z a anodou A je malé zpomalovací napětí, které zabrání pomalým elektronům, aby dosáhly elektrody Z. Výsledkem experimentu je volt ampérova charakteristika mezi elektrodami K a Z, tj. změnou akceleračního napětí sledujeme, jak se mění proud (obrázek 3-7). Dokud energie elektronu nedosáhne hodnoty 4.9 eV, tak proud  $I$  roste s





Obrázek 3-7: Náčrt výsledku Franckova – Hertzova experimentu.  $J$  je měřený proud mezi K a Z a  $U$  je akcelerační napětí.

rostoucím akceleračním napětím. Jakmile elektron dosáhne energie 4.9 eV, tak s dalším zvyšováním napětí  $U$  proud prudce klesá. Atom rtuti při kolizi s elektronem od něj odebere přesně toto množství energie, které následně vyzáří v charakteristické vlnové délce  $\lambda=235,7$  nm. S dalším zvyšováním napětí  $U$  elektron může znovu získat kinetickou energii a proces se opakuje.

Tímto experimentem Franck a Hertz ukázali existenci diskrétních energetických hladin v atomu rtuti.

### 3.1.6 Sternův – Gerlachův experiment

Otto Stern a Walther Gerlach pozorovali rozdělení svazku atomů v nehomogenním magnetickém poli. Pokud má atom nenulový magnetický moment  $\mathbf{m}$ , potom na něj bude působit síla  $\mathbf{F}$  generovaná nehomogenním magnetickým polem  $\mathbf{H}$ . Potenciální energie v magnetickém poli je dána výrazem

$$V = \mathbf{m} \cdot \mathbf{H} \quad (3-29)$$

Protože je síla dána gradientem potenciální energie, dostáváme pro sílu  $\mathbf{F}$  výraz

$$\mathbf{F} = -\text{grad}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{H}). \quad (3-30)$$

V experimentu byli použity neutrální atomy stříbra. Byla studována distribuce atomů po průchodu nehomogenním magnetickým polem. Podle klasické teorie se očekávalo rozšíření svazku v důsledku měnící se síly v magnetickém poli. Svazek se však rozdělil na dvě poloviny. Tento výsledek ukazuje, že magnetický moment v atomu nemůže být orientován libovolně, ale spíš v jednom ze dvou navzájem opačných směrů. To naznačuje, že kvantování není omezeno pouze na energii a hybnost, jak ukázaly předešlé experimenty, ale vyskytuje se i u dalších veličin. Tato konkrétní kvantizace se nazývá kvantizace momentu hybnosti.

### 3.1.7 Heisenbergovy relace neurčitosti



Obrázek 3-8: Werner Karl Heisenberg (\*1901- +1976)

Potíže s Bohrovou teorií přetrvávaly do doby, kdy Heisenberg vymyslel teorii, která byla později známa jako maticová kvantová mechanika. Všiml si, že při přechodu z jednoho stavu do druhého jsou příslušné veličiny popsány dvěma indexy (např.  $\omega_{mn}$ ). To jej přivedlo k myšlence, že i zobecněné souřadnice  $p$  a  $q$ , by měly být v kvantové mechanice nahrazeny maticemi s maticovými elementy  $p_{mn}$  a  $q_{mn}$ . Potom např. pro energii, která v případě klasického konzervativního jednorozměrného systému má tvar

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + V, \quad (3-31)$$

přejde v Heisenbergově kvantové mechanice na matici nekonečného řádu

$$H_{mn} = \frac{(p^2)_{mn}}{2m_0} + V_{mn} \quad (3-32)$$

Násobení matic není komutativní, na rozdíl od funkcí používaných v klasické fyzice. Ukázal, že kvantovou obdobou Poissonových závorek je komutátor  $[q,p]=qp-pq$  matic  $p$  a  $q$  a požadoval zachování formálních vlastností Poissonových závorek. Odtud se pak Heisenberg dostal k předpokladu

$$qp - pq = i \text{ konst} \quad , \quad (3-33)$$

kde  $\text{konst}$  je konstanta a  $q$  a  $p$  jsou matice. Řešením problému lineárního harmonického oscilátoru a atomu vodíku a z požadavku, aby se výsledky shodovali s experimenty ukázal, že

$$\text{konst} = \hbar \quad . \quad (3-34)$$

Toto je základ, ze kterého lze odvodit známé Heisenbergovy relace neurčitosti, které se v jednorozměrném případě zjednoduší na výraz

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad , \quad (3-35)$$

kde  $\Delta x$  je neurčitost určení polohy částice a  $\Delta p$  je neurčitost určení její hybnosti. Tato relace vystihuje zcela novou skutečnost. Totiž, že svět je na mikroskopické úrovni rozmazaný. Čím přesněji určíme polohu částice  $\Delta x$ , tím větší bude nepřesnost v určení její hybnosti  $\Delta p$ .

### 3.2 Vlnové vlastnosti látky

Experimenty ukazují, že světlo v závislosti na druhu experimentu musíme popisovat buďto jako elektromagnetické vlny (interferenční jevy, difrakce), nebo jako částice (fotony; např. Comptonův efekt).



Obrázek 3-9: Louis de Broglie(\*1892 - +1987)

De Broglie přišel s myšlenkou, že když vlnám lze přiřadit vlastnosti částic, tak by to mělo jít i naopak a částicím přiřadit vlastnosti vln. Volné částici o hmotnosti  $m$ , hybnosti  $\mathbf{p}$  a energii  $E$  přiřadíme rovinnou vlnu

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \exp(i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar) \quad , \quad (3-36)$$

kde byly použity relace, které platí v případě fotonu ( a podle de Broglieho hypotézy by měly platit i pro částici)

$$E = \hbar \omega \quad (3-37)$$

a

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} = \frac{h}{\lambda} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \quad (3-38)$$

Potom podle de Broglieho má částice přiřazenou vlnovou délku

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad , \quad (3-39)$$

kde  $v$  je rychlost částice a  $m$  je její hmotnost. Dokud je  $mv$  daleko větší než  $\hbar$  , potom se vlnové vlastnosti na velkých škálách (v makrosvětě) neprojeví. Ovšem pro elementární částice už dostáváme hodnoty vlnových délek dostatečně velké, aby mohlo docházet k vlnovým efektům jako např. ohyb svazku elektronů na překážce.

Hmotné vlny na rozdíl od elektromagnetických vykazují disperzi ve vakuu, tj.  $\omega(\mathbf{k})$ . Co to znamená? Vyjděme z relativistického výrazu pro energii částice

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad . \quad (3-40)$$

Pro malé rychlosti částice ( $v \ll c$ ) dostáváme pro energii výraz

$$E \simeq m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m_0} + \dots \quad (3-41)$$

Odkud pomocí relací (3-26) a (3-27) dostáváme výsledek pro kruhovou frekvenci vlny, popisující částici

$$\omega(k) \simeq \frac{m_0 c^2}{\hbar} + \frac{\hbar k^2}{2m_0} + \dots \quad . \quad (3-42)$$

Fázová rychlost je potom rovna

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{m_0 c^2}{\hbar k} + \frac{\hbar k}{2m_0} + \dots \quad . \quad (3-43)$$

Na druhou stranu, pro velikost fázové rychlosti platí

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar \omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{m c^2}{m v} = \frac{c^2}{v} \quad . \quad (3-44)$$

Protože je  $c > v$ , z výsledku (3-33) plyne, že fázová rychlost  $u$  hmotných vln je vždy větší než rychlost světla ve vakuu. Z toho dále plyne, že  $u$  nepředstavuje rychlost pohybu částic! Jaká veličina, spojená s hmotnou vlnou, reprezentuje rychlost pohybu částic? Spočítejme, čemu se rovná tzv. Grupová rychlost  $v_g$ . Grupová rychlost je definována vztahem

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar \omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} \quad . \quad (3-45)$$

Změna energie částice  $dE$  vyvolaná silou  $F$  podél trajektorie  $ds$  je

$$dE = F \cdot ds \quad , \quad (3-46)$$

respektive

$$dE = d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (3-47)$$

kde jsme využily vztah  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/ds$ . Protože je rychlost  $\mathbf{v}$  rovnoběžná s hybností  $\mathbf{p}$ , dostáváme výsledek

$$\frac{dE}{dp} = v \quad . \quad (3-48)$$

Z výrazů (3-37) a (3-34) dostáváme

$$v_g = v \quad , \quad (3-49)$$

tzn. že grupová rychlost vlny reprezentuje rychlost pohybu částice. Částice se ve vlnové interpretaci bude pohybovat jako vlnový balík.

### 3.2.1 Difrakce hmotných vln

Ukázali jsme, že by částice měly vykazovat při určitých experimentech vlastnosti vln. Clinton Davisson a Lester Gerner prováděli experiment s difrakcí elektronového svazku dokazující existenci hmotných vln. V tomto pokusu představuje povrch monokrystalu rovinnou difrakční mřížku. Elektrony jsou rozptýleny na povrchu krystalu, ale nepronikají dovnitř.

Difrakční maxima se objeví, pokud je splněna podmínka

$$n\lambda = d \sin \theta \quad . \quad (3-50)$$

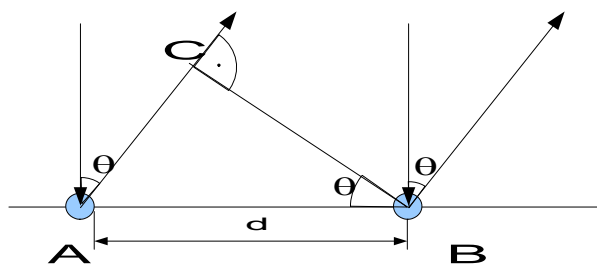
Elektron získá po průchodu akceleračním napětím  $U$  energii  $eU$ . Protože je

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 eU}} \quad , \quad (3-51)$$

tak spolu s podmínkou pro difrakční maximum (3-39) obdržíme výraz pro difrakční úhel  $\theta$  ve tvaru

$$\sqrt{U} \sin(\theta) = \frac{2\pi\hbar n}{\sqrt{2m_0 e}} \quad , \quad (3-52)$$

což bylo ověřeno experimentem.



Obrázek 3-10: Difrakce elektronového svazku na povrchu krystalu. Jednotlivé atomy jsou v mřížce od sebe ve vzdálenosti  $d$ . Dopadající elektronový svazek je odchýlen do směru, který je dán úhlem  $\theta$ .

### 3.3 Schrödingerova rovnice

V rámci Heisenbergovy maticové kvantové mechaniky bylo obtížné hledat transformace, převádějící matice nekonečného řádu na diagonální matice a najít tak stacionární stavy kvantového systému. Toto a de Broglieho hypotéza společně s výsledky Davissonova a Gernerova experimentu s rozptylem elektronového svazku na krystalu motivovalo Schrödingera k formulování vlnové kvantové mechaniky.

Centrem této teorie je vlnová funkce, jejíž časový a prostorový vývoj se řídí Schrödingerovou rovnicí

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = V(\mathbf{r}) \psi, \quad (3-53)$$

kde  $m$  je hmotnost částice a  $V$  je potenciál pole, ve kterém se částice pohybuje.



Obrázek 3-11: Erwin Schrödinger (\*1887 - +1961)

Pro konzervativní systémy lze časovou Schrödingerovu rovnici získat formálně z klasického výrazu pro celkovou energii

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V \quad (3-54)$$

a udělat záměnu

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (3-55)$$

a

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (3-56)$$



Všimněme si, že pokud rovnici (3-45) splňují funkce  $\psi_1$  a  $\psi_2$ , potom ji splňuje i funkce  $\psi_1 + \psi_2$ . Z této rovnice potom vyplývá *princip superpozice*.

### 3.3.1 Interpretace vlnové funkce



Obrázek 3-12: Max Born (\*1882 - +1970)

V této chvíli je přirozené klást si otázku, jaký je fyzikální význam této zavedené vlny? Max Born razil cestu *statistické interpretaci* vlnové funkce popisující částici. Základní idea tkví v tom, že pohyb částic je určen pouze zákony zachování energie a hybnosti a okrajovými podmínkami, které závisí na konkrétním experimentu. Částice je držena v těchto mezích vlnovou funkcí  $\psi$  a *pravděpodobnost*, s jakou se částice nachází v daném čase na daném místě je

$$dP(t, x, y, z) = |\psi(t, x, y, z)|^2 dV, \quad (3-57)$$

kde jsme zavedli prostorovou hustotu pravděpodobnosti

$$|\psi|^2 = \psi \psi^*. \quad (3-58)$$

Tato veličina je normalizována na jedničku, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi \psi^* = 1. \quad (3-59)$$

Tato podmínka vyjadřuje, že se částice musí někde v prostoru vyskytovat. Tato veličina musí být časově nezávislá, jinak bychom nemohli porovnávat pravděpodobnosti vztažené k různým časovým okamžikům.

### **SHRNUTÍ KAPITOLY**

V této kapitole jsme na základě experimentů s vyzařováním AČT, fotoelektrickým jevem a dalších ukázali, jak vedli k formulování kvantově mechanické hypotézy. Byly formulovány Heisenbergovy relace neurčitosti, podle kterých nelze např. měřit s libovolnou přesností současně polohu a hybnost částice. Byl formulován vlnově částicový dualismus – záření má v určitých experimentech vlastnosti vln a v jiných vlastnosti částic, hmotné částici lze zase přiřadit v určitých experimentech vlnové vlastnosti. Nakonec byl definován pojem vlnové funkce jako řešení Schrödingerovy rovnice. Čtverec vlnové funkce byl interpretován jako hustota pravděpodobnosti výskytu částice na daném místě.

## 4 STRUKTURA ATOMU [2][3][5][8]

### RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY



V této kapitole si ukážeme, jak popsat nejjednodušší atom vyskytující se v přírodě, pomocí Schrödingerovy rovnice.

### CÍLE KAPITOLY



Po prostudování této kapitoly budete umět:

- zapsat Schrödingerovu rovnici ve sférických souřadnicích,
- jak hledat její řešení pro atom vodíku,
- popsat co je spin elektronu,
- Pauliho vylučovací princip

### KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY



atom vodíku, Schrödingerova rovnice, vlnová funkce, spin

### 4.1 Vodíkový model atomu

Nejjednodušším atomem, který v přírodě známe, je atom vodíku. Jeho jádro se skládá z jednoho protonu  $p^+$  a v elektronovém obalu má jeden elektron  $e^-$ . Hmotnost protonu je mnohem větší než hmotnost elektronu, a tak si tento systém lze představit tak, že záporný

elektron obíhá kladně nabitě jádro podobně, jako planety obíhají Slunce. Je tu ale jeden velmi zásadní problém. Podle klasické elektrodynamiky musí nabitá částice, která se pohybuje po zakřivené dráze, vyzařovat elektromagnetické vlny. Tím ale ztrácí energii v poli jádra a v řádu několika pikosekund se na něj zřítí. To ale naštěstí nepozorujeme (kdyby neexistovaly stabilní atomy – neexistovali bychom ani my). Tyto úvahy vedly Nielse Bohra k formulování jeho modelu vodíkového atomu, Bohužel jeho model selhává u předpovídání energetických hladin ostatních atomů. Zde si ukážeme, jak vlnová rovnice (3-53) vede ke kvantování energií.

## 4.2 Schrödingerova rovnice pro vodík

V rámci Bohrova modelu nelze najít pravděpodobnosti přechodu elektronu z jednoho energetického stavu na druhý. Bohrovův model nelze aplikovat na jiné atomy než na atom vodíku. Správná teorie navíc ukazuje, že energie není závislá na momentu hybnosti.

Cesta jak vyřešit tyto problémy vede přes řešení trojrozměrné Schrödingerovy rovnice. Nechť je elektron na pozici  $(x, y, z)$  a jeho vzdálenost od protonu je  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Dále trojrozměrný operátor kinetické energie má tvar

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) . \quad (4-1)$$

Potenciální energie elektronu v poli vodíkového jádra je

$$V = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (4-2)$$

Na stabilní orbitě je elektron ve stacionárním stavu. Řešení Schrödingerovy rovnice pro tento stav píšeme v separovaném tvaru

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-iEt/\hbar} , \quad (4-3)$$

kde jsme od sebe oddělili část závislou na prostorové souřadnici a část závislou na čase  $t$ . Po dosazení všech těchto komponent do Schrödingerovy rovnice bude její třírozměrná podoba dána rovnicí

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \psi = E \psi . \quad (4-4)$$

Radiální vzdálenost je poměrně složitou funkcí souřadnic, zatímco potenciální energie je funkcí pouze  $r$ . Proto je výhodné převést tuto rovnici do sférických souřadnic  $r$ ,  $\theta$  a  $\varphi$ . Příslušné transformační vztahy píšeme ve tvaru

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad (4-5)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \quad , \quad (4-6)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (4-7)$$

a inverzní transformace ve tvaru

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \quad , \quad (4-8)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad , \quad (4-9)$$

$$z = r \cos(\theta) \quad . \quad (4-10)$$

Operátor kinetické energie má ve sférických souřadnicích tvar

$$\hat{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad (4-11)$$

a rovnici (4-4) potom přepíšeme na rovnici

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} \psi = E \psi \quad (4-12)$$

Dá se ukázat, že existují vlastní řešení rovnice (4-12), která můžeme psát ve tvaru součinu funkcí, kde každá z těchto funkcí závisí pouze na jedné nezávislé proměnné  $r$ ,  $\theta$  a  $\varphi$ . Řešení pak píšeme ve tvaru

$$\Psi_{nlm_\varphi} = R_{nl}(r) \Theta_{lm_\varphi}(\theta) \Phi_{m_\varphi}(\varphi) \quad , \quad (4-13)$$

kde  $R_{nl}$  je funkcí pouze  $r$ ;  $\Theta_{lm_\varphi}$  je funkcí pouze souřadnice  $\theta$  a  $\Phi_{m_\varphi}$  je funkcí pouze souřadnice  $\varphi$ . Energetické hladiny závisí pouze na  $n$ , což je přirozené číslo a nezávisí na  $l$  ani  $m_\varphi$ ; kde  $l$  je celé kladné číslo odpovídající celkovému momentu hybnosti částice a spadá do

intervalu  $0 \leq l \leq n-1$  ;  $m_\varphi$  je celé číslo odpovídající průmětu celkového momentu hybnosti do osy  $z$  a nabývá hodnot z intervalu  $-l \leq m_\varphi \leq l$  .

Nejjednodušší z těchto řešení, které odpovídá základnímu stavu je to, které závisí pouze na  $r$  . Rovnice (4-12) se potom redukuje na tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} \right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = E \Psi \quad (4-14)$$

a nejjednodušší řešení této rovnice je

$$\Psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} \exp(-r/a) , \quad (4-15)$$

kde indexy jsou konkrétní hodnoty kvantových čísel  $n=1$ ,  $l=0$  a  $m_\varphi=0$ ; konstanta  $a$  je Bohrov poloměr a v případě vodíku má hodnotu  $a=0.529$  angstromů. Dosazením toho řešení zpět do rovnice (4-14) zjistíme, že energie tohoto stavu musí být

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a^2} = \frac{-m e^4}{2(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} . \quad (4-16)$$

Řešení této trojrozměrné rovnice existují při splnění okrajových podmínek, což vede k tomu, že energie elektronu dosahují pouze hodnot, které jsou dané Bohrovou formulí pro energetické hladiny elektronu ve vodíku,

$$E_n = \frac{-m e^4}{2(4\pi\epsilon_0 \hbar n)^2} . \quad (4-17)$$

$n$  se nazývá hlavní kvantové číslo. Pro danou hodnotu  $n$  existuje  $n^2$  možných řešení, které se liší závislostí na  $\theta$  a  $\varphi$  . Dochází k takzvané degeneraci stavu. Základní stav  $n=1$ , není degenerovaný. Stav s hlavním kvantovým číslem  $n=2$  je čtyřikrát degenerovaný (tomu odpovídají čtyři nezávislá řešení rovnice (4-14)). Stav s hlavním kvantovým číslem  $n=3$  je devětkrát degenerovaný (tomu odpovídá devět nezávislých řešení rovnice (4-14)). V následující tabulce uvádíme pro ilustraci všechny vlnové funkce pro  $n=1, 2$  a  $3$ .

Normalizované vlnové funkce pro první tři stavy elektronu v atomu vodíku.

$n=1$

$$\Psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} \exp(-r/a)$$

$n=2$

$$\Psi_{200} = \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{r}{a} \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r}{a}\right)$$

$$\Psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi a^3} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r}{a}\right) \cos\theta$$



$$\Psi_{21,\pm 1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}a^3} \frac{r}{a} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\right) \sin\theta \exp(\pm i\varphi)$$

$n=3$

$$\Psi_{300} = \frac{1}{3\sqrt{3}\pi a^3} \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a} + \frac{2}{27} \frac{r^2}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{r}{a}\right)$$

$$\Psi_{310} = \frac{4}{27} \frac{1}{\sqrt{2}\pi a^3} \frac{r}{a} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a} \right) \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{r}{a}\right) \cos\theta$$

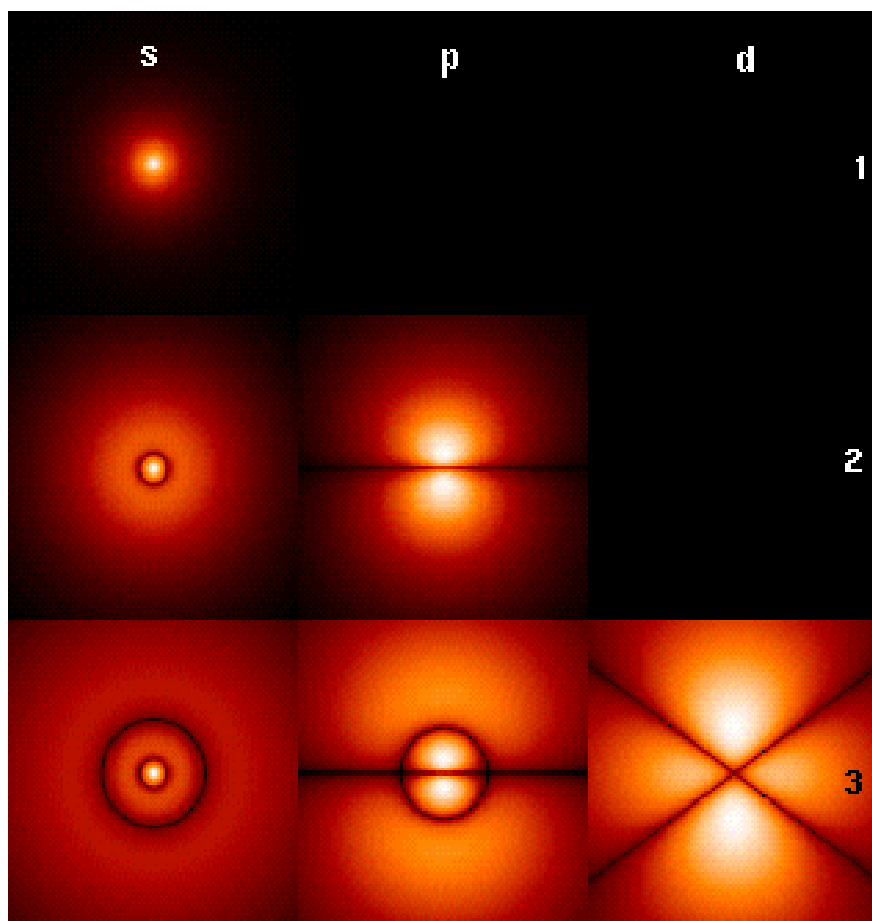
$$\Psi_{31,\pm 1} = \frac{2}{27} \frac{1}{\sqrt{\pi} a^3} \frac{r}{a} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a} \right) \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{r}{a}\right) \sin\theta \exp(\pm i\varphi)$$

$$\Psi_{320} = \frac{1}{81} \frac{1}{\sqrt{6}\pi a^3} \frac{r^2}{a^2} \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{r}{a}\right) (1 - 3\cos^2\theta)$$

$$\Psi_{32,\pm 1} = \frac{1}{81} \frac{1}{\sqrt{\pi} a^3} \frac{r^2}{a^2} \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{r}{a}\right) \sin\theta \cos\theta \exp(\pm i\varphi)$$

$$\Psi_{32,\pm 2} = \frac{1}{162} \frac{1}{\sqrt{\pi} a^3} \frac{r^2}{a^2} \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{r}{a}\right) \sin^2\theta \exp(\pm 2i\varphi)$$

Kvadráty těchto vlnových funkcí nám dávají hustotu pravděpodobnosti výskytu elektronu na daném  $r$ ,  $\theta$  a  $\varphi$ . V grafech na následujícím obrázku jsou zobrazeny kvadráty těchto vlnových funkcí. Písmena s, p, d zde zastupují hodnoty orbitálního čísla  $l = 0, 1, 2$ .



Obrázek 4-1: Hustoty pravděpodobnosti výskytu elektronu pro tři různá hlavní kvantová čísla  $n$  a tři orbitální kvantová čísla  $l$ .

#### 4.2.1 Spin elektronu a Pauliho vylučovací princip

V předchozích kapitolách jsme se dozvěděli, že ve Sternově – Gerlachově experimentu bylo zjištěno, že svazek atomů v základním stavu s nulovým momentem hybnosti  $l=0$ , a tedy i s nulovým magnetickým momentem  $m$  se v magnetickém poli štěpí na dva svazky.

Z tohoto experimentu vyplývá, že elektron má kromě orbitálního magnetického momentu ještě vlastní magnetický moment. Kromě již zmíněných tří kvantových čísel je elektronu přiřazeno ještě čtvrté kvantové číslo odpovídající jeho vlastnímu magnetickému momentu, spinové kvantové číslo  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ .





Obrázek 4-2: Wolfgang Ernst Pauli (\*1900- +1958)

Než se dostaneme k Pauliho vylučovacímu principu, prostudujme systém identických částic. Uvažujme atom helia, které má dva elektrony v elektronovém obalu. Společná vlnová funkce obou elektronů bude záviset na dvou skupinách proměnných  $r_1, S_1$  pro jeden elektron a  $r_2, S_2$  pro druhý. Máme tedy následující vlnovou funkci

$$\psi = \psi(r_1, S_1; r_2, S_2) \quad . \quad (4-18)$$

Nyní předpokládejme, že si elektrony prohodí souřadnice, tzn. že vlnovou funkci přepíšeme na

$$\psi = \psi(r_2, S_2; r_1, S_1) \quad . \quad (4-19)$$

Poznamenejme, že první dva argumenty přísluší elektronu 1 a druhé dva argumenty přísluší elektronu 2.

Toto prohození souřadnic má dobrý smysl. Bylo totiž zjištěno, že elektrony jsou od sebe nerozlišitelné (v klasické mechanice je možné v systému identických částic jednotlivé částice označkovat, a tak je od sebe odlišit; v kvantové mechanice to ovšem nelze).

Pravděpodobnost nalezení elektronu 1 v objemu  $dV_1$  a elektronu 2 v objemu  $dV_2$  je

$$dp_{12} = |\psi(r_1, S_1; r_2, S_2)| dV_1 dV_2 \quad . \quad (4-20)$$

Protože jsou oba elektrony nerozlišitelné, musí být tato pravděpodobnost stejná jako pravděpodobnost nalezení elektronu 2 v  $dV_1$  a elektronu 1 v  $dV_2$ ,

$$dp_{21} = |\psi(r_2, S_2; r_1, S_1)| dV_1 dV_2 \quad (4-21)$$

Dostáváme tak rovnici

$$\psi(r_2, S_2; r_1, S_1) = \exp(i\Phi) \psi(r_1, S_1; r_2, S_2) \quad (4-22)$$

kde  $\exp(i\Phi)$  je fázový faktor, pro který při detailních výpočtech ukážeme, že nabývá hodnot

$$\exp(i\Phi) = \pm 1 \quad (4-23)$$

Zde znaménko + platí pro částice s celočíselným spinem (bosony) a znaménko – platí pro částice s poločíselným spinem (fermiony). Elektron má velikost spin  $\frac{1}{2}$  a jedná se tedy o fermion a dostáváme, z (4-22), rovnici

$$\psi(r_2, S_2; r_1, S_1) = -\psi(r_1, S_1; r_2, S_2) \quad (4-24)$$

Nyní si položíme otázku, zda se mohou nacházet dva elektrony ve stejném stavu. Označíme-li společný stav dvou elektronů

$$(r_1, S_1) = (r_2, S_2) = (r, S) \quad (4-25)$$

a dosadíme do rovnice (4-24), dostaneme

$$\psi(r, S; r, S) = -\psi(r, S; r, S) \quad (4-26)$$

Z tohoto výsledku ale plyne, že hustota pravděpodobnosti nalezení dvou elektronů ve stejných stavech je rovna nule. Jinými slovy, dva elektrony nemůžou být ve stejném stavu.

Stav elektronu v elektronovém obalu atomu je identifikován čtyřmi kvantovými čísly  $n, l, m_l, m_s$ . Pro dva elektrony to pak znamená, že se jejich stavy musí lišit aspoň v jednom z kvantových čísel. Tím jsme vyjádřili Pauliho vylučovací princip.

### **SHRNUTÍ KAPITOLY**



V této kapitole jsme ukázali, jak pomocí Schrödingerovy rovnice najít vlnové funkce určující hustotu pravděpodobnosti výskytu elektronu v poli jádra na daném  $r$  ( $r$  je radiální souřadnice).

Zjistili jsme, že pro dané hlavní kvantové číslo neexistuje  $n^2$  možných řešení. Pro  $n=1,2,3$  jsme řešení uvedli v tabulce 4-1.

Nakonec jsme zavedli pojem spinu elektronu a vysvětlili, jak souvisí s Pauliho vylučovacím principem.

## 5 ATOMOVÉ JÁDRO [3][4][5]



### **RYCHLÝ NÁHLED KAPITOLY**

V této kapitole popíšeme jak se vyvíjely modely atomového jádra. Odhadneme rozměry jádra. Definujeme pojem účinného průřezu. Popíšeme Rutherfordův experiment. Popíšeme základní nástroje pro zkoumání jaderné struktury – urychlovače částic. Popíšeme jadernou strukturu. Budeme se zabývat rozpadem nestabilních jader. Nakonec popíšeme praktické využití jaderného štěpení a jaderného slučování.



### **CÍLE KAPITOLY**

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- modely jádra,
- definici účinného průřezu,
- odvodit rovnice pro Rutherfordův rozptyl,
- princip urychlovače částic,
- jaderná struktura
- rozpadový zákon,
- princip jaderné elektrárny
- princip tokamaku



### **KLÍČOVÁ SLOVA KAPITOLY**

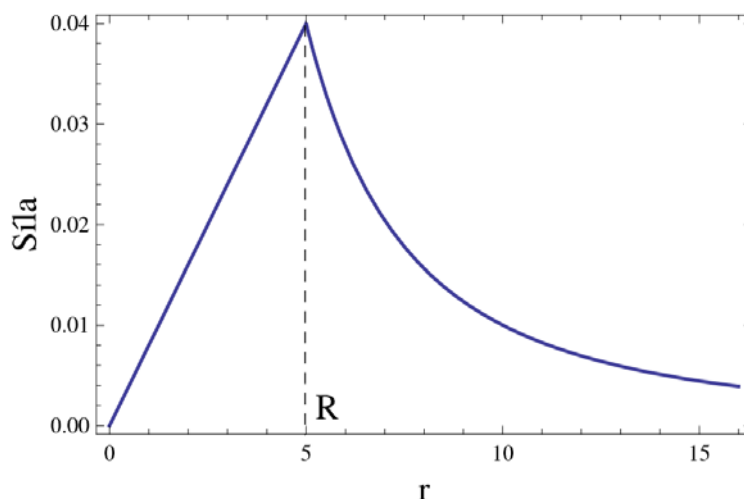
atomové jádro, účinný průřez, urychlovač, jaderné štěpení, jaderné slučování, elektrárna, tokamak

V roce 1896 byla Henri Becquerelem objevena radioaktivita u některých látek. To vedlo ke zvýšenému zájmu o jádro atomu a jeho strukturu. Ernest Rutherford v roce 1909 řídil experiment, ve kterém byla svazkem částic  $\alpha$  ostřelována zlatá folie. Chtěl ověřit, nakolik je



správná představa tzv. pudinkového modelu atomu. Pokud by kladný a záporný náboj v látce byl rozložen rovnoměrně, tak by svazek prošel folií víceméně ve směru, v jakém na něj dopadl. Rutherford ovšem pozoroval něco docela jiného, nejen že byly některé  $\alpha$  částice odkloněny od původního směru, ale některé byly dokonce obráceny o  $180^\circ$ . To vedlo k představě, že kladný náboj je koncentrovaný do tzv. jádra, které bylo obklopeno mrakem záporně nabitých elektronů.

## 5.1 Model jádra



Obrázek 5-1: Průběh síly generované polem jádra. Pro  $r < R$  uvnitř jádra a pro  $r > R$  vně jádra.

Metoda kterou jsou zkoumány vlastnosti jádra se obecně nazývá rozptyl. Je vyslán svazek s charakteristickými vlastnostmi jako například kinetická energie  $E_k$ , náboj  $Q$ , hmotnost  $m$ , ... . Takový svazek je zaměřen na cíl (např. zlatá folie v Rutherfordově experimentu) a je pozorován odklon částic vůči původnímu směru svazku, změna kinetické energie, ... . Z výsledků takových experimentů se dá usoudit na strukturu, náboj, generované pole, hmotnost, atd. .

Mějme následující jednoduchý model jádra. Nechť má jádro sférický tvar a náboj  $Z|e|$ , kde  $Z$  je celočíselný násobek náboje elektronu  $e$ . Hmota nechť je v něm rovnoměrně rozložena. Tento model nám poskytne rozumné odhady dimenzí jádra.

Pole jádra je na vzdálenostech  $r > R$  coulombické

$$F_c = \frac{Z e Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}, \quad (5-1)$$

a uvnitř jádra (z Gaussova zákona) je pole dáno vztahem

$$F_j = \frac{Z e Q r}{\pi \epsilon_0 R^3}, \quad (5-2)$$

kde  $R$  je poloměr jádra. Takové pole má potom v závislosti na  $r$  průběh, jaký je vyobrazen na obrázku 5-1.

## 5.2 Odhad velikosti jádra

Nyní zkusíme v rámci zvoleného sférického modelu jádra odhadnout, jaký je jeho rozměr. V základním stavu atomu vodíku se elektron nachází ( s největší pravděpodobností ) na poloměru

$$a = \frac{4\pi\epsilon\hbar^2}{me^2} = 0.5 \text{ Å} , \quad (5-3)$$

kde Å jednotkou délky a nazývá se angstrom a platí

$$1 \text{ Å} = 0.1 \text{ nm} . \quad (5-4)$$

Protože teoretický Bohrov model vodíkového atomu předpovídá jeho energetické hladiny v souladu s experimentálně získanými údaji, můžeme tvrdit, že

$$r_J < 0.5 \text{ Å} . \quad (5-5)$$

Dále se ukazuje, že elektronová hustota pravděpodobnosti  $|\psi(r)|^2$  se výrazně, v případě základního stavu, nemění v intervalu  $r \simeq 0$  a  $r \simeq a$  , tzn.

$$P(r) = \int |\psi(r)|^2 dV \rightarrow P(r) = |\psi(r)|^2 V . \quad (5-6)$$

Protože je jádro sférické, získáváme pro poměr objemu jádra a objemu atomu v základním stavu výraz

$$\frac{V_J}{V} = \frac{R^3}{a^3} . \quad (5-7)$$

Protože jsou energetické hladiny určeny s přesností do 6 desetinného místa, potom zjistíme, že

$$\frac{R^3}{a^3} < 10^{-6} \rightarrow \frac{R}{a} < 10^{-2} . \quad (5-8)$$

A tedy pro poloměr jádra bude nutně platit

$$R < 10^{-2} \text{ \AA} . \quad (5-9)$$

Když půjdeme ještě dále, tak ve vodíku podobném atomu s protonovým číslem  $Z$  je poloměr první Bohrovy orbity přibližně  $a/Z$ . V těžkých atomech je řádově 100 elementů, takže poloměr Bohrovy orbity takového atomu potom je

$$\tilde{a} \sim 0.005 \text{ \AA} , \quad (5-10)$$

takže dále zmenšíme odhad poloměru jádra na

$$R < 10^{-4} \text{ \AA} . \quad (5-11)$$

Experimentálně bylo zjištěno, že jádro má poloměr řádově

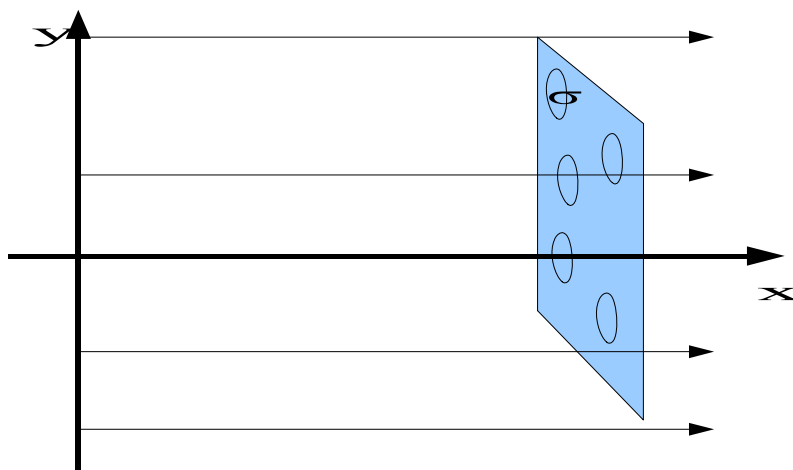
$$R \sim 10^{-5} \text{ \AA} = 10^{-15} \text{ nm} . \quad (5-12)$$

### 5.3 Účinný průřez a diferenciální účinný průřez

Ještě dříve, než se pustíme do analýzy Rutherfordova rozptylu, definujme si následující veličiny, které nám umožní numericky ohodnotit experimentálně získané výsledky.

Předpokládejme, že  $N_i$  částic na jednotku plochy za sekundu dopadá na cíl. Tato veličina se nazývá hustota dopadajícího toku. Potom počet částic, které projdou plochou  $A$  za jednu sekundu, je

$$N = N_i A \quad . \quad (5-13)$$



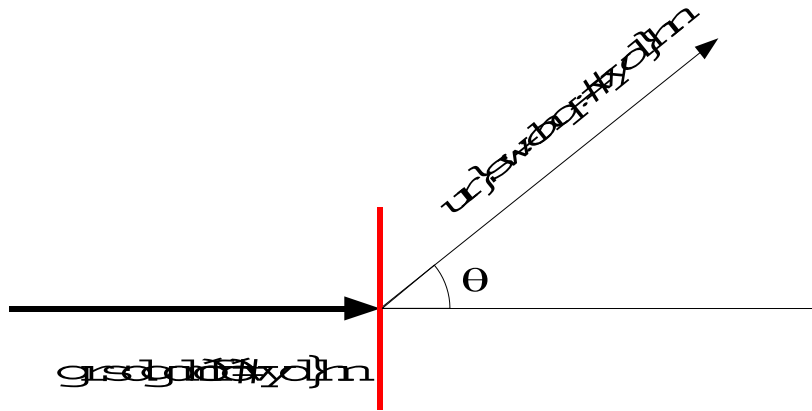
Obrázek 5-2: Svazek částic dopadající na folii s rozptylovači.

Nechť je na cílové folii velký počet „rozptylovačů“ kruhového průřezu o stejné ploše  $\sigma$ , které jsou náhodně rozloženy na ploše folie. Pokud je na jd. ploše  $\eta$  takových rozptylovačů a  $\sigma$  je tak malé, že se žádné dva kroužky nepřekrývají, pak je celková plocha pokryta kroužky v jednom čtverečním metru cílové folie rovna  $\eta\sigma$ . Potom je, podle (5-13), počet částic, které se střetnou s kroužky na čtvereční metr za jednu sekundu, roven

$$N_s = N_i \eta \sigma \quad . \quad (5-14)$$

Zde  $\sigma$  bývá označováno jako *totální účinný průřez rozptylu*.

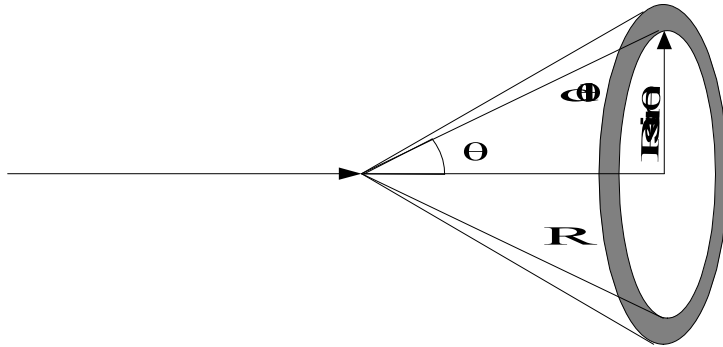
Ať už je fyzikální mechanismus rozptylu jakýkoliv, vždycky jej můžeme reprezentovat pravděpodobností procesu, ve smyslu účinného průřezu.



Obrázek 5-3: Rozptyl dopadajícího svazku na folii. Část svazku je rozptýlena do úhlu  $\theta$ .

Hodně informací o silách způsobující rozptyl se dozvíme studiem počtu rozptýlených částic jako funkce úhlu rozptylu  $\theta$ . O ploše  $\sigma$  uvažujeme tak, jakoby byla složena z nepřekrývajících se infinitezimálních plošek  $d\sigma(\theta)$  s  $\sigma = \int d\sigma$ , kde je  $d\sigma$  ta část účinného průřezu, která odpovídá rozptylu částic do malého intervalu úhlů kolem úhlu  $\theta$ . Definujme ještě prostorový úhel  $d\Omega$  jako





Obrázek 5-4: K definici diferenciálního účinného průřezu.

$$d\Omega = \frac{dA}{R^2} \quad (5-15)$$

což se rovná (viz obrázek 5-4)

$$d\Omega = \frac{2\pi R \sin\theta R d\theta}{R^2} = 2\pi \sin\theta d\theta \quad (5-16)$$

Tudíž  $d\sigma(\theta)$  je účinný průřez rozptylu do prostorového úhlu  $d\Omega$ . Diferenciálním účinným průřezem pak nazýváme poměr

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN_s/d\Omega}{N_i\eta} \quad (5-17)$$

Celkový účinný průřez potom je

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} (2\pi \sin\theta) d\theta \quad (5-18)$$

## 5.4 Rutherfordův rozptyl

### 5.4.1 Alfa a beta částice

Jedním z prvních experimentů, které nám poskytly přímý svědectví o velikosti jádra, byl rozptyl  $\alpha$ -částic při průchodu kovovou folií.

Po objevení radioaktivity (při rozpadu uranu) byly pozorovány dva druhy záření. První bylo nazváno záření  $\alpha$  a bylo pro něj charakteristické, že bylo snadno absorbováno tenkým plátkem materiálu. Druhé bylo nazváno záření  $\beta$ . Toto záření bylo naopak velmi pronikavé do materiálu. Dráhy obou druhů záření jsou ohýbány v magnetickém poli, ale v opačných směrech. Oba druhy záření zanechávají při průchodu mlžnou komorou viditelné stopy. Z toho můžeme vyvodit, že oba druhy záření se skládají z nabitých částic. Nakonec se později ukázalo, že záření  $\alpha$  se skládá z jádra helia (dva protony + dva neutrony) a záření  $\beta$  je tok velmi rychlých elektronů.

### 5.4.2 Rutherfordova teorie

Studujme, jak se v centrálním Coulombickém poli odchýlí trajektorie nabitě částice. Coulombické pole je konzervativní a tedy se v něm zachovává celková energie částice. V polárních souřadnicích má zákon zachování energie tvar

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{ZeQ}{4\pi\epsilon_0 r} = konst, \quad (5-19)$$

kde  $Q$  a  $m$  jsou náboj a hmotnost částice,  $Ze$  je náboj jádra, tečka reprezentuje derivaci podle času. Velmi daleko od jádra ( $r \gg ZeQ$ ) je

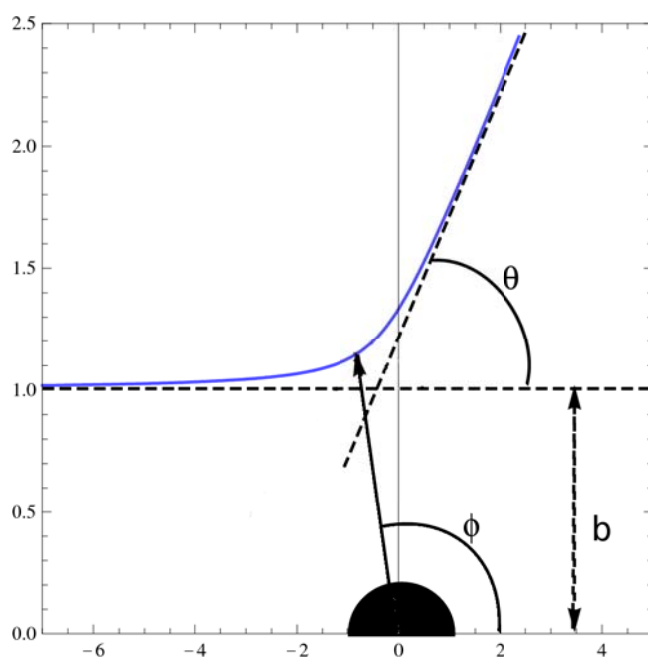
$$konst = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (5-20)$$

kde  $v_0$  je počáteční velikost rychlosti částice daleko od jádra. Další veličinou, která se v konzervativním poli zachovává, je azimutální moment hybnosti

$$L = mr^2\dot{\varphi} = mbv_0, \quad (5-21)$$

kde  $b$  tzv. záměrná vzdálenost (viz obrázek 5-5).





Obrázek 5-5: Rozptyl nabité částice v centrálním Coulombickém poli.

Osamostatněním  $\dot{r}$  v rovnici (5-19), dosazením z (5-20) a vydělením (5-21) dostaneme rovnici

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{b^2}{r^4} + \frac{b^2}{r^2} + \frac{2ZeQ}{4\pi\epsilon_0 r m v_0^2} = 1 \quad (5-22)$$

Zavedením nové veličiny  $k$  výrazem

$$k = \frac{2ZeQ}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2} \quad (5-23)$$

dostaneme závislost úhlu  $\varphi$  na radiální souřadnici  $r$  ve tvaru

$$\varphi = -\arcsin \left[ \sqrt{\frac{4b^2}{4b^2 + k^2}} \left( \frac{b}{r} + \frac{k}{2b} \right) \right] + C \quad (5-24)$$

Označme  $C = \varphi_0$ , tuto konstantu určíme z počátečního předpokladu, že pro  $r \rightarrow \infty$  je  $\varphi = \pi$  a dostáváme

$$\varphi_0 = \pi + \arcsin \frac{k}{\sqrt{4b^2 + k^2}}. \quad (5-25)$$

Dostáváme tak  $\varphi$  jako funkci  $r$  ve tvaru

$$\varphi = \pi + \arcsin \frac{k}{\sqrt{4b^2 + k^2}} - \arcsin \left[ \sqrt{\frac{4b^2}{4b^2 + k^2}} \left( \frac{b}{r} + \frac{k}{2b} \right) \right]. \quad (5-26)$$

Vyjádříme-li z (5-26)  $r$ , dostaneme rovnici

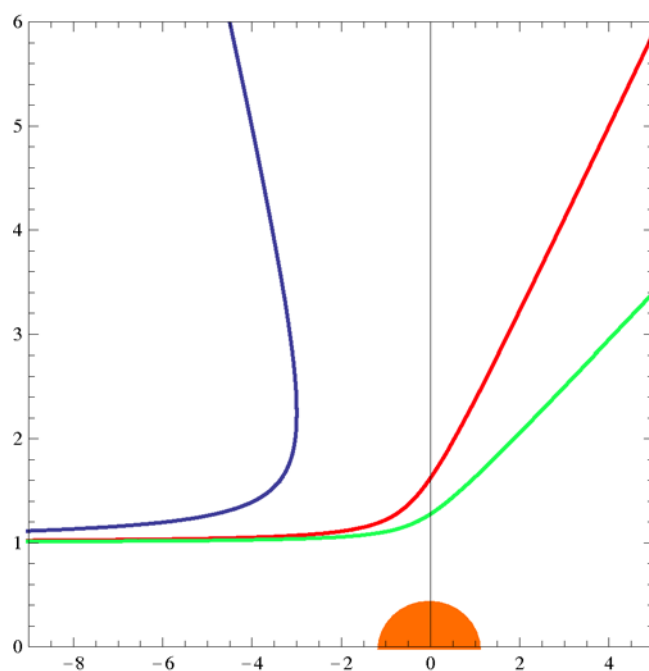
$$r = \frac{2b^2}{\sqrt{4b^2 + k^2}} \left[ \sin \left( \varphi - \arcsin \frac{k}{\sqrt{4b^2 + k^2}} \right) - \frac{k}{\sqrt{4b^2 + k^2}} \right]. \quad (5-27)$$

Průběh takové typické trajektorie je na obrázku 5-6. Nyní musíme ještě dát do souvislosti azimutální úhel  $\varphi$  a rozptylový úhel  $\theta$ . Po srážce dospěje částice zpět do nekonečna, to znamená, že potom  $2\varphi = \theta$ , a tak dostáváme z (5-26) výraz

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{k}{\sqrt{4b^2 + k^2}}, \quad (5-28)$$

ve kterém je zakódováno, jaký bude úhel rozptylu pro příslušné počáteční podmínky pohybu částice. Dosadíme ještě zpět za  $k$  a máme výraz

$$\cot \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta / 2}}{\sin \theta / 2} = \frac{2 \pi \epsilon_0 m b v_0^2}{Z e^2}, \quad (5-29)$$



Obrázek 5-6: Tři reprezentativní trajektorie nabité částice v centrálním poli. Trajektorie se liší hodnotou záměrné vzdálenosti (impaktním parametrem)  $b$ . Jejich velikosti jsou ve vztahu  $b(\text{modrá}) < b(\text{červená}) < b(\text{zelená})$ .

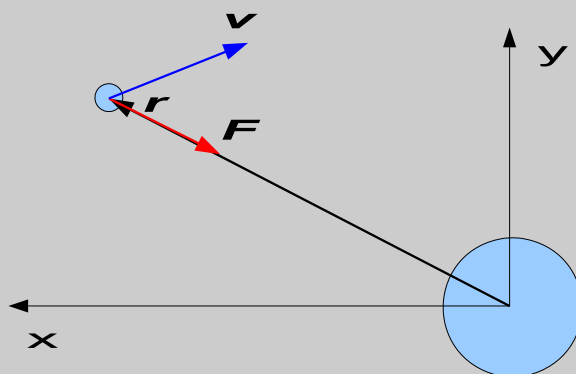
zde jsme už dosadili za  $Q = 2e$ , protože Rutherford ve svých experimentech používal částice  $\alpha$  (2 protony + 2 neutrony tvořící jádro  ${}^4_2\text{He}$ ).



### ŘEŠENÁ ÚLOHA 5-1

Ukažte, že v centrálním poli se zachovává azimutální moment hybnosti  $L$ .

Řešení:



Obrázek 5-7: Centrální pole buzené objektem  $O$  působí silou  $\mathbf{F}$  na objekt  $K$  pohybující se rychlostí  $\mathbf{v}$ .

Centrální síla působí pouze v radiálním směru, v bázi polárních souřadnic má komponenty

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r . \quad (5-30)$$

Silový moment  $\mathbf{M}$ , který způsobuje síla  $\mathbf{F}$  na částici s polohovým vektorem  $\mathbf{r}$ , je dán vztahem

$$\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{r} . \quad (5-31)$$

Dosadíme-li (5-30) do (5-31), dostaneme

$$\mathbf{M} = F_r \mathbf{e}_r \times r \mathbf{e}_r = 0 , \quad (5-32)$$

protože vektorový součin paralelních vektorů je nulový vektor. Současně ale je

$$\mathbf{M} = \frac{d \mathbf{L}}{dt} , \quad (5-33)$$

odkud pro centrální pole dostáváme

$$\mathbf{L} = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{konst} = m r v_{\varphi} \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_{\varphi} \rightarrow L = m r^2 \dot{\varphi} \quad . \quad (5-34)$$

### 5.4.3 Rutherfordův účinný průřez

Formule (5-29) dává do společného vztahu úhel rozptylu  $\theta$  a impaktní parametr  $b$ . Nyní odvodíme, jak vypadá diferenciální účinný průřez  $d\sigma / d\Omega$ . Napišme rovnici (5-29) ve tvaru

$$\cot \frac{\theta}{2} = 2 \pi \epsilon_0 \frac{m v_0^2}{Z e^2} b \quad . \quad (5-35)$$

Když budeme zmenšovat impaktní parametr  $b$ , bude se zvětšovat úhel rozptylu  $\theta$ . Účinný průřez jevu, kdy úhel rozptylu je větší než určitá hraniční hodnota  $\theta$ , je jednoduše plocha vymezená impaktním parametrem  $b$  a píšeme

$$\sigma(\geq \theta) = \pi b^2 = \pi \left( \frac{Z e^2}{2 \pi \epsilon_0 m v_0^2} \cot^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 \quad . \quad (5-36)$$

Ted' si představme, že částice zasáhne mezikruží ohrazené impaktními parametry  $b$  a  $b+db$ . Plocha tohoto prstence je

$$d\sigma = 2 \pi b db \quad . \quad (5-37)$$

Z rovnice (5-35) vyjádříme  $b$  a dostáváme

$$b = \frac{Z e^2}{2 \pi \epsilon_0 m v_0^2} \cot \frac{\theta}{2} \quad . \quad (5-38)$$

Diferencováním této rovnice získáme výraz

$$db = -\frac{1}{2} \frac{Z e^2}{2 \pi \epsilon_0 m v_0^2} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta / 2} \quad . \quad (5-39)$$

Dříve jsme odvodili, že diferenciál prostorového úhlu můžeme psát ve tvaru

$$d\Omega = 2 \pi \sin \theta d\theta \quad . \quad (5-40)$$

Dosazením (5-39) do (5-37) pak společně s (5-40) dostaneme pro diferenciální účinný průřez výraz

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16 \pi} \left( \frac{Z e^2}{\epsilon_0 m v_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta / 2} \quad . \quad (5-41)$$

Pro velký impaktní parametr  $b$  je naopak úhel rozptylu  $\theta$  malý. V případě diferenciálního účinného průřezu to ale znamená, že bude pro dostatečně velké  $b$  nekonečný. Problém je v tom, že Coulombické pole, je pole dalekého dosahu. V reálné situaci se však  $\alpha$  částice pohybuje v Coulombickém poli pouze dokud není náboj jádra odstíněn elektrony. Takže formule (4-41) je prakticky použitelná pouze pro malá  $b$ .

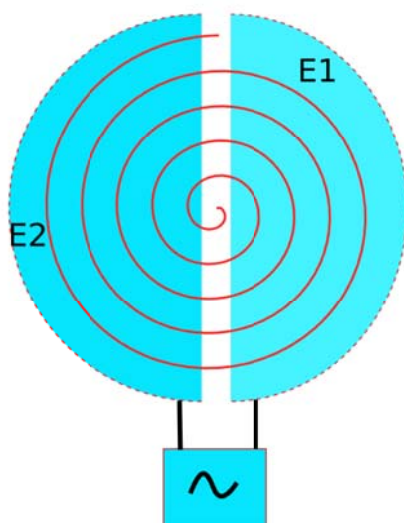
## 5.5 Urychlovače částic

Při experimentech s rozptylem  $\alpha$  částic při průchodu kovovou folií byly použity částice vyprodukované při radioaktivním rozpadu nestabilních jader, tj. částice, které jsou produkovány v přírodě. Pro detailní zkoumání jaderných sil (a nejenom jaderných sil) je ale zapotřebí mít k dispozici různé druhy částic s potřebnou energií, kterými se bombarduje zkoumané jádro.

Pro tyto účely byla vyvinuta zařízení, která jsou schopna pomocí elektrického pole urychlovat a pomocí magnetického pole udržovat částice podél potřebné trajektorie a navést je na cílové jádro. Jsou to urychlovače částic. Podívejme se detailněji na urychlovač nazvaný cyklotron.

### **5.5.1 Cyklotron**





Obrázek 5-8: Schéma cyklotronu. Částice je udržována na spirále mezi elektrodami E1 a E2 pomocí homogenního magnetického pole. Při průchodu mezerou mezi elektrodami je urychlena elektrostatickým potenciálem, jehož polarita se periodicky mění synchronně s pohybem urychlované částice.

Máme následující konfiguraci. Dva duté polokruhové vodiče tvoří rovinu, ve které se pohybuje urychlovaná částice. Vložíme tuto konfiguraci do homogenního magnetického pole s magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$  tak, že vektor  $\mathbf{B}$  je kolmý na rovinu pohybu částice. Toto magnetické pole způsobí, že se bude částice pohybovat po kružnicích. V mezeře mezi elektrodami je střídavé napětí. Jeho úhlová frekvence je stejná jako úhlová frekvence pohybu částice a je synchronizována tak, aby maximum tohoto napětí nastalo v okamžiku, kdy částice vstoupí do mezery.

Spočítejme, jakou frekvenci musí střídavé elektrické pole mít. Máme částici s nábojem  $q$ , hmotností  $m$  a rychlostí  $v$ . Částice se pohybuje v homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B}$ . Poloměr její dráhy je  $r$  úhlová frekvence  $\omega = v / r$ . Velikost magnetické síly působící na částici je

$$F = q v B = q r \omega B \quad . \quad (5-42)$$

Velikost magnetické síly je rovna součinu centrifugálního zrychlení a hmotnosti částice, tj.

$$q r \omega B = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r \quad , \quad (5-43)$$

a tedy, úhlová frekvence pohybující se částice je

$$\omega = \frac{q B}{m} . \quad (5-44)$$

Poznamenejme, že tento výsledek není závislý na poloměru dráhy částice. To znamená, že kdykoliv je částice v mezeře mezi elektrodami urychlena, tak se zvýší její rychlost  $v$  a tím se zvýší i poloměr její dráhy  $r$ , protože se  $\omega$  nemění. Částice se postupně pohybuje po spirále, až nakonec opustí prostor vodičů a je navedena na terč.

Tento mechanismus urychlování funguje do okamžiku, kdy je zanedbatelná změna hmotnosti částice v důsledku relativistických efektů. Když změna  $m$  není zanedbatelná, tak má částice tendenci dostat se mimo fázi vůči urychlovacímu elektrickému poli a tím dále nedochází k jejímu urychlování. Tento problém se dá překlenout tak, že budeme udržovat poměr  $B / m$  konstantní, jak je vidět z (5-44). To znamená, že musíme vhodně měnit velikost magnetického pole. To s sebou přináší další problém. V takovém případě je dráha podél magnetických čar nestabilní a částice narážejí do elektrod. Tento problém se dá taky řešit do řádu stovek MeV tím, že se magnetické pole podél kruhové dráhy periodicky mění.

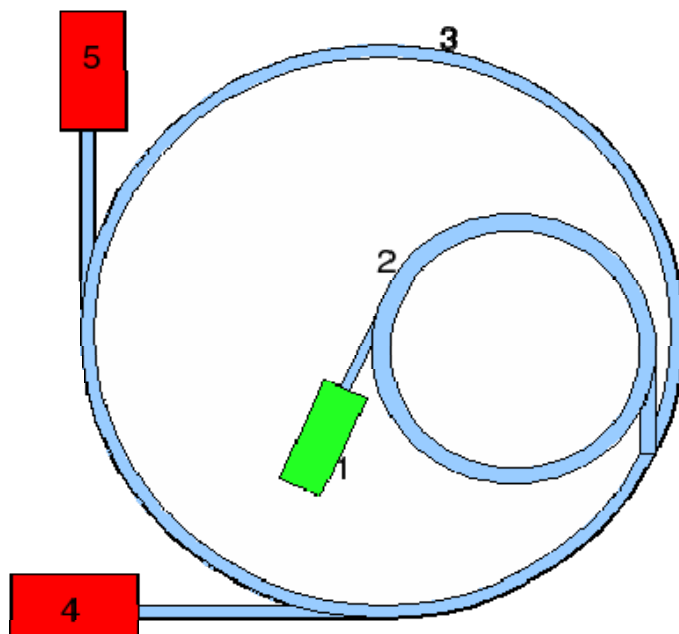
### 5.5.2 Moderní urychlovače

Jedním z limitujících faktorů dosažitelných energií je konečný rozměr evakuované komory ve které se mezi elektrodami urychluje svazek částic putující od středu po spirále k okraji komory.

Synchrotron je cyklický urychlovač částic, kde jsou částice urychlovány v evakuovaných trubicích, které jsou uspořádány do kruhu. Magnetické pole (zakřivující dráhu částic) a elektrické pole (urychlující částice) jsou pečlivě synchronizovány s urychlovaným svazkem.

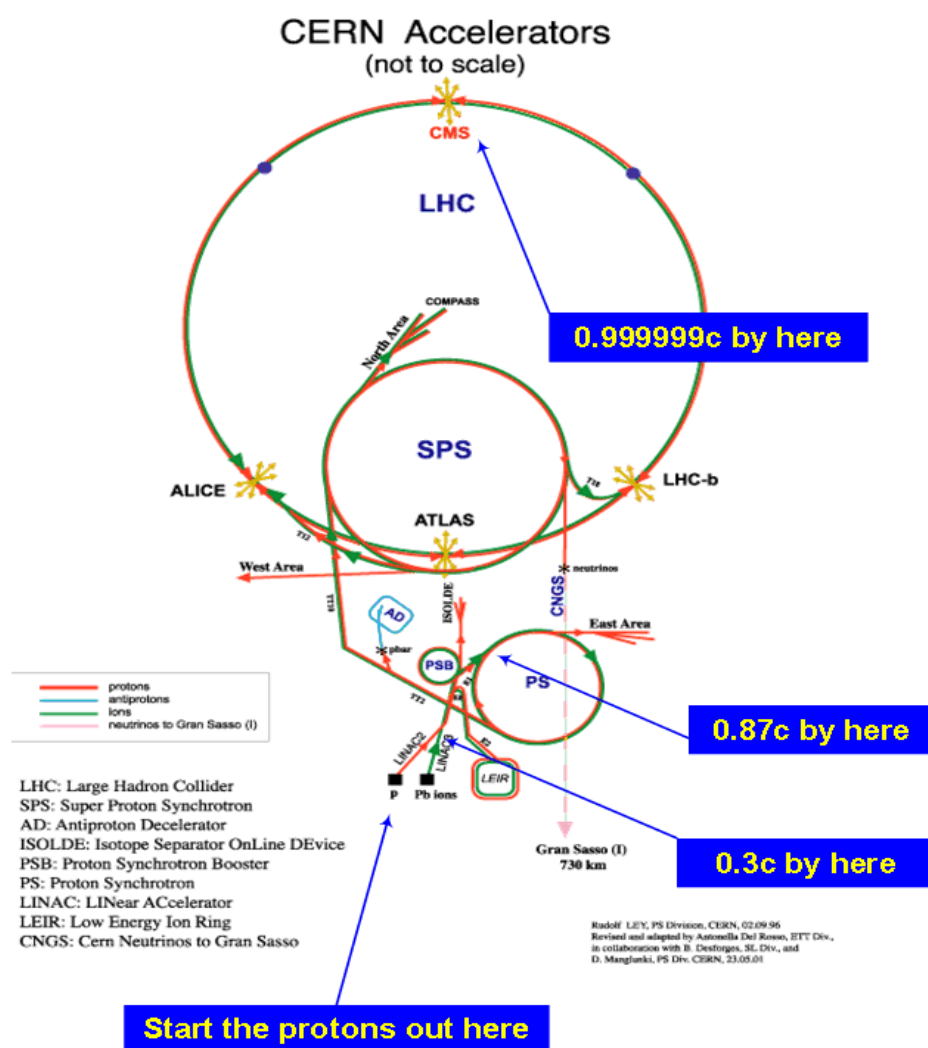
Abychom mohly částice urychlovat, je třeba je nejdřív umístit do hlavního prstence urychlovače. K tomu slouží lineární urychlovače nebo cyklotrony, ve kterých dosáhne svazek částic určitou střední energie a pak je vstříknut do hlavního prstence urychlovače. Podle počáteční rychlosti se pak nastaví magnetické pole a začíná další urychlování.

Po určitém počtu cyklů, které jsou potřebné k dosažení požadované energie, jsou částice odkloněny do experimentálních stanic, kde jsou navedeny na terčíky a výsledky srážky jsou zaznamenány detektory.



*Obrázek 5-9: Schéma typického synchrotronu. 1-lineární urychlovač injektující částice (elektrony, jádra,...) do translačního prstence – 2 kde jsou urychleny na určitou energii a poté jsou odkloněny do prstence – 3, ve kterém jsou dourychleny na požadovanou energii a uskláněny. Takto se připraví svazky pro připravené experimenty a poté jsou odkloněny na příslušná experimentální pracoviště 4 a 5, kde bombardují terčik a výsledek této interakce je zaznamenán velmi citlivými detektory.*

V roce 2008 byl spuštěn největší urychlovač na světě, LHC (Large Hadron Collider). Je to typ synchrotronu, ve kterém jsou proti sobě urychlovány svazky těžkých částic. Při jejich střetech vznikají podmínky, které panovaly ve velmi ranném vesmíru a umožňují nám tak testovat současné teorie v tak extrémních podmínkách.



Obrázek 5-10: LHC

LHC je primárně konstruován pro srážky protonových svazků. Má obvod 27 km, celkem 1232 dipólových magnetů udržuje protonové svazky na kruhové dráze a dalších 392 kvadrupólových magnetů se stará o udržení fokusovaného protonového svazku.

Samotný proces urychlování probíhá v několika fázích. Nejprve lineární urychlovač *LINAC2* vyprodukuje protony s energií 50 MeV. Poté jsou injektovány do tzv. „proton synchrotron boosteru“ (PSB), který dále zvýší energii protonového svazku na 1,4 GeV. Po dosažení této energie jsou z PSB přeměrovány do „proton synchrotronu“ (PS), který svazek urychlí na 26 GeV. Nakonec jsou protony injektovány do „super proton synchrotronu“ (SPS), kde získají energii 450 GeV. Odtud už putují do hlavního urychlovače LHC, kde po dvaceti minutách dosahuje svazek protonů energie 7 TeV.

Paralelně je urychlován i další svazek, ale v opačném směru. Celkově je energie srážky 14 TeV.

### ŘEŠENÁ ÚLOHA 5-2



Jakou rychlostí se řítí protony v LHC, je-li jejich energie 7TeV?

Řešení:

Jednotky energie používané ve fyzice elementárních částic jsou elektronvolty. To je energie, kterou získá elektron v potenciálu 1V, tj.

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} . \quad (5-45)$$

7 TeV tedy představuje  $7 \times 10^{12} \times 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} = 11.214 \times 10^{-7} \text{ J}$  . Klidová hmotnost protonu je

$$m_p = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg} . \quad (5-46)$$

K určení samotné rychlosti využijeme vztah mezi energií a hmotností, který jsme odvodili v kapitole věnované speciální teorii relativity,

$$E = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \quad (5-47)$$

kde za hodnotu rychlosti světla bereme

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} . \quad (5-48)$$

Z (5-47) tedy dostáváme

$$v = c \sqrt{1 - \left( \frac{m_0 c^2}{E} \right)^2} . \quad (5-49)$$

Dosazením příslušných hodnot dostáváme pro rychlost protonů s energií 7TeV hodnotu

$$2.997922455 \times 10^8 \text{ m/s} , \quad (5-50)$$

což je

$$0.99999999 \text{ c} . \quad (5-51)$$



### **SAMOSTATNÝ ÚKOL 5**

Určete, jakou rychlostí se pohybují protony na konci každé z urychlovacích fází, při kterých dosáhnou energie 450 GeV. Během první fáze dosáhnou energie 50 MeV, během druhé 1.4 GeV, během třetí fáze energie 26 GeV a během poslední 450 GeV.

**SAMOSTATNÝ ÚKOL 6**

Určete, jakou klidovou energii ve elektronvoltech a v joulech má elektron. Jakou energii v násobcích eV má, když se pohybuje rychlostí  $0.999999c$  ?

**5.6 Struktura jádra**

Experimenty s rozptylem  $\alpha$  částic nám odhalily, že mezi  $\alpha$  částicí a jádrem dochází ke coulombické interakci, tj. působí na sebe navzájem silou úměrnou  $1/r^2$  až do vzdálenosti několika fermi ( $1\text{fermi}=10^{-15}\text{ m}$ ). Další experimenty prováděné v urychlovačích s různými typy jader ukazují, že hmota v jádru je rozložena s téměř konstantní hustotou a že poloměr jádra může být vyjádřen vztahem

$$R=r_0 W^{1/3} \quad , \quad (5-52)$$

kde  $r_0$  je přibližně 1.1 fermi.

Hmotnost jádra  $M$  je určena ze znalosti hmotnosti atomu,  $M_{at}$ , od které je odečtena hmotnost elektronů  $m_e$  v obalu, tj.

$$M(Z)=M_{at}(Z)-Z m_e \quad . \quad (5-53)$$

Z chemických tabulek zjistíme, že hmotnosti jader jsou téměř identické s celočíselným násobkem atomové hmotnostní jednotky. Např. pro izotop zinku ( $Z=40$ ) s atomovou hmotností  $W=91.9046$  amu je  $A=92$ . Hmotnost jednoho protonu v atomových hmotnostních jednotkách je 1.0078 amu.

Z toho bylo nejprve vyvozeno, že jádro se skládá z protonů a z příslušného počtu elektronů, které odstiňují přebytečný náboj  $(A-Z)$ . Podle Heisenbergovy relace neurčitosti je tato představa nereálná. Totiž, jak už bylo řečeno, jádro je koncentrováno do oblasti s poloměrem  $r \sim 10^{-15}m$ , to znamená, že neurčitost polohy elektronu v jádře je  $\Delta x \sim 10^{-15}m$ . Pro tak malou neurčitost v poloze elektronu je neurčitost jeho hybnosti

$$\Delta x \Delta p \simeq \frac{\hbar}{2} \rightarrow \Delta p \simeq \frac{\hbar}{2 \Delta x} \sim 100 \text{ MeV}/c \quad . \quad (5-54)$$

Střední hodnotu hybnosti elektronu můžeme ztotožnit s touto neurčitostí jeho hybnosti. To je na elektron s klidovou energií 0.511 MeV extrémně relativistická hybnost. Z toho plyne, že elektron by musel být uvnitř jádra vázán velmi silnou přitažlivou silou, která daleko přesahuje coulombickou ! V přírodě ovšem nebyl nalezena jakákoliv další nezávislá evidence tak silné interakce mezi elektronem a protonem.

Naštěstí byl v roce 1932 objeven Jamesem Chadwickem neutron, který má nepatrně větší hmotnost než proton. A téměř ihned Heisenberg navrhl, že v jádře musejí být neutrony a protony. Počet neutronů je právě  $A-Z$ .

### 5.6.1 Vlastnosti protonu a neutronu

Ještě dříve, než začneme studovat síly, které drží jádro pohromadě, seznámíme se se základními vlastnostmi jeho základních stavebních kamenů – protonu a neutronu.

Hmotnost protonu je  $m_p = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$  a hmotnost neutronu je  $m_n = 1.6749 \times 10^{-27} \text{ kg}$ . Proton nese kladný náboj o velikosti  $e$  a neutron je elektricky neutrální. Oba mají vnitřní moment hybnosti charakterizovaný spinovým kvantovým číslem  $l=1/2$ . Vlastní hodnota čtverce spinového momentu hybnosti potom je

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) = \frac{3}{4} \hbar^2, \quad (5-55)$$

který je spojen magnetickým momentem  $\mu$  vztahem

$$\mu = g \frac{e \hbar}{2m_p} L, \quad (5-56)$$

kde veličina  $e \hbar / 2m_p$  se nazývá jaderný magneton a  $g$  je číslo s hodnotou kolem čísla 5 a musí být určeno experimentálně. Pro proton vychází

$$g_p = 5.58. \quad (5-57)$$

Nyní se blíže podívejme na nejjednodušší jádro tvořené aspoň jedním neutronem a protonem. Jedná se o deuteron, izotop vodíku, který má v jádře právě jeden neutron a jeden proton. Protože je hmotnost D větší než hmotnost H, budou jeho vodíku podobné energetické hladiny poněkud posunuty oproti energetickým hladinám atomu vodíku.

Experimentální hodnoty Rydbergových konstant pro H a D jsou

$$\begin{aligned} R_H &= 109\,669.581 \text{ cm}^{-1} \\ R_D &= 109\,707.419 \text{ cm}^{-1}. \end{aligned} \quad (5-58)$$

Protože poměr těchto dvou veličin je prostě poměr redukovaných hmotností, máme



$$\frac{R_H}{R_D} = \frac{1 + m_e/m_D}{1 + m_e/m_p} \quad (5-59)$$

a odtud už dostáváme, že

$$\frac{m_D}{m_p} = \left( \frac{m_p}{m_e} \frac{R_H - R_D}{R_D} + \frac{R_H}{R_D} \right) = 1.9985 \quad , \quad (5-60)$$

v atomových hmotnostních jednotkách je hmotnost D rovna 2.013 . Sečteme-li však hmotnosti volného protonu a volného neutronu, tak dostáváme

$$m_p + m_n = 1.007276 \text{ amu} + 1.008665 \text{ amu} = 2.015941 \text{ amu} \quad , \quad (5-61)$$

to znamená, že celková hmotnost jádra je menší než součet hmotností jednotlivých komponent. Chybějící hmotnost je schována ve vazebné energii  $E_b$ , která spolu váže proton a neutron. Její hodnotu snadno určíme pomocí Einsteinova vztahu pro energii

$$E_b = E_D - (E_p + E_n) = m_D c^2 - m_p c^2 - m_n c^2 = 2.224 \text{ MeV} \quad , \quad (5-62)$$

což je extrémně hodně ve srovnání s vazebnými energiemi v atomu. Hodnota vazebné energie mezi protonem a neutronem naznačuje, že síla držící jádro pohromadě bude extrémně silná.

Ještě prozkoumejme spin a magnetický moment deuteronu. Ukazuje se, že jaderné síly mezi nukleony (protony a neutrony) silně závisí na relativní orientaci spinů komponent jádra. Stav s nejnižší energií je ten, ve kterém jsou jaderné spiny vyrovnány. Spinové kvantové číslo protonu a neutronu je  $\frac{1}{2}$ . Pokud jsou spiny paralelní, tak za předpokladu, že orbitální moment hybnosti je 0, tak spinové kvantové číslo deuteronu by mělo mít hodnotu  $I_D = 1$ . Experimenty ukazují, že tomu tak skutečně je.

Co se týče magnetického momentu deuteronu, zjistíme následující. Magnetický moment neutronu je antiparalelní s jeho spinem, naproti tomu magnetický moment protonu je paralelní s jeho spinem. Pokud jsou v deuteronu spiny neutronu a protonu paralelní, tak jejich magnetické momenty budou opačně orientovány a pro magnetický moment deuteronu dostaneme

$$\mu_D = \mu_p - \mu_n = 2.7928 - 1.9128 = 0.88 \text{ jm} \quad , \quad (5-63)$$

experimentálně byla zjištěna hodnota 0.8574 jm (jm=jaderný magneton).

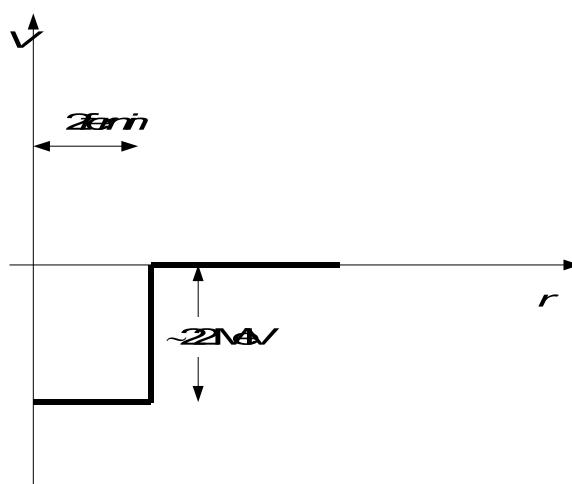
A nyní už budeme zkoumat samotné jaderné síly, které vážou nukleony v jádře.

### **5.6.2 Jaderné síly**

Z předchozího výkladu víme, že nukleony musí být spolu vázány velmi silnou přitažlivou silou, která je krátkého dosahu, tj. neměla by překročit hranici 2 fermi. Potenciál této síly je načrtnutý na obrázku 5-11 pro neutron-proton a na obrázku 5-12 pro proton-proton.

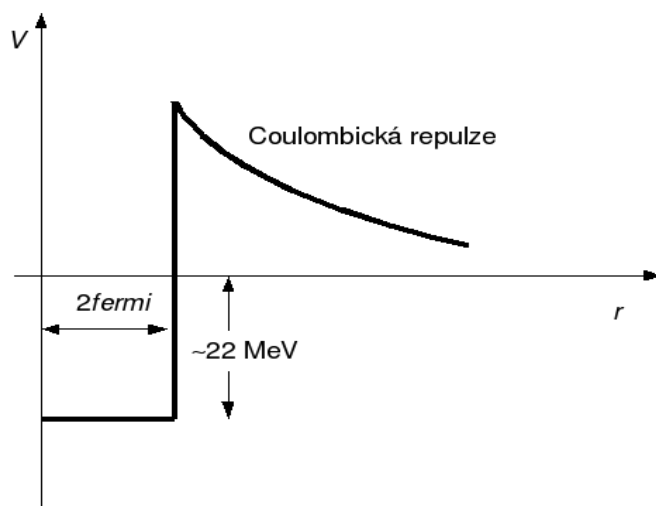






Obrázek 5-11: Potenciál interakce mezi neutronem a protonem.

Jak je vidět z obrázku 5-11, neutron a proton spolu interagují jen do vzdálenosti 2fermi, dále už je neutron mimo dosah jaderné síly, a protože je elektricky neutrální, tak je coulombická interakce nulová. V případě interakce protonů, pod hranicí 2 fermi převládají jaderné síly a nad touto hranicí převládá coulombická odpuzivá síla.



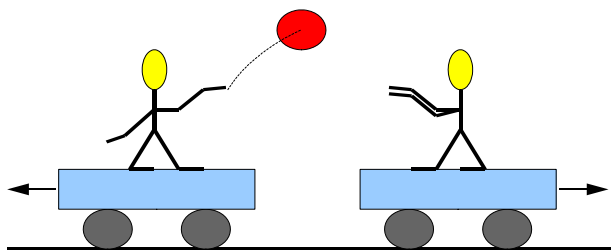
Obrázek 5-12: Potenciál interakce mezi protonem a protonem.

V roce 1935 japonský vědec H. Yukawa navrhl mechanismus, jakým by mohly fungovat jaderné síly. Jeho představu si ilustrujeme na následující mechanické analogii. Máme dva vozy a na každém z nich jednoho fyzika. Necháme je, ať si mezi sebou vyměňují míč tak, že si jej přehazují. Co se bude dít? Když první fyzik hodí míč, tak se v důsledku zákona zachování hybnosti začne pohybovat směrem od svého kolegy. Druhý fyzik míč chytne, získá hybnost a taky se začne pohybovat opačným směrem než první fyzik. Když pokus opakují, tak

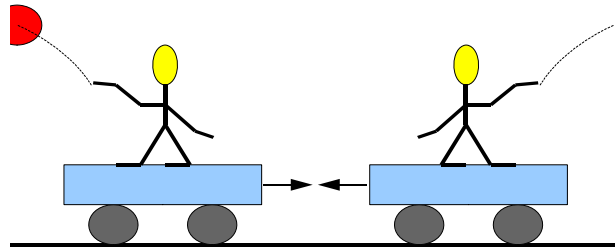


*Obrázek 5-13: Hideo Yukawa (\*1907 - + 1981)*

můžeme říct, že mezi nimi působí odpuzivá síla. Pro demonstraci Yukawovy přitažlivé síly se oba fyzikové obrátí zády k sobě a začnou z vozu vyhazovat míče a tím se začnou pohybovat k sobě a efektivně mezi nimi působí přitažlivá síla.



*Obrázek 5-14: Mechanický analog k Yukawovu mechanismu odpuzivých sil.*



Obrázek 5-15: Mechanický analog k Yukawovu mechanismu přitažlivých sil.

Tito naši páni fyzikové reprezentují nukleony v jádře a míče zprostředkovatele jaderné interakce.

Pokud nukleony skutečně interagují výměnou částic, tak můžeme odhadnout, jakou hmotnost taková výměnná částice musí mít. Opět využijeme Heisenbergova principu neurčitosti. Předpokládejme, že jsou nukleony od sebe vzdáleny 2 fermi, potom neurčitost v poloze výměnné částice je

$$\Delta x \sim 2 f, \quad (5-64)$$

takže pro neurčitost hybnosti máme

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}. \quad (5-65)$$

Opět můžeme ztotožnit střední hybnost výměnné částice s její neurčitostí hybnosti a dostáváme

$$p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}. \quad (5-66)$$

Ted' stačí vzít v úvahu rozumnou velikost rychlosti výměnné částice. Její rychlost může dosáhnout  $c/2$ , aniž by se příliš změnila její hmotnost, tj.

$$p = \frac{m c / 2}{\sqrt{1 - 1/4}} \sim m c / 2 (1 + 1/8) \sim m c. \quad (5-67)$$

Odtud a z výrazu (5-66) dostaneme pro odhad hmotnosti výměnné částice výraz

$$m \sim \frac{\hbar}{2 f c} , \quad (5-68)$$

což nám pro poměr hmotnosti výměnné částice ku hmotnosti elektronu dá výsledek

$$\frac{m}{m_e} \sim \frac{10^{-34}}{(3 \times 10^8)(2 \times 10^{-15})(10^{-30})} \sim 160 . \quad (5-69)$$

Výměnná částice by měla být řádově 100 krát těžší než elektron.

Později byla objevena částice s hmotností  $206 m_e$  nazvané  $\mu$  mezon a myslelo se, že se jedná právě o Yukawovu částici. Byl tu ovšem problém s tím, že  $\mu$  mezon není silně vázán v jádře. Může totiž strávit dlouhou dobu v jádře, aniž by byl absorbován. Problém vyřešil objev další částice nazvané  $\pi$  mezon, která už je zodpovědná za jadernou interakci. Ve skutečnosti existují tři druhy  $\pi$  mezonu, dva s nábojem a jeden neutrální. Jejich vlastnosti jsou shrnuty v tabulce 5-1.  $\pi$  mezon se rychle rozpadá a tím je zajištěn krátký dosah jaderné interakce.

Tabulka 5-1: Fyzikální vlastnosti  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  a  $\pi^-$  mezonů.

|                   | $\pi^+$      | $\pi^0$     | $\pi^-$      |
|-------------------|--------------|-------------|--------------|
| elektrický náboj  | + e          | 0           | - e          |
| hmotnost          | $273.23 m_e$ | $264.4 m_e$ | $273.23 m_e$ |
| spin              | 0            | 0           | 0            |
| magnetický moment | 0            | 0           | 0            |

Yukawa našel přibližný výraz pro mezinukleonovou potenciální energii, která má tvar

$$V(r) = -g^2 \frac{\exp(-m r)}{r} . \quad (5-70)$$

Tento potenciál je schopen vysvětlit výsledky rozptylových experimentů při nízkých energiích. Jedná se tedy o aproximaci pravého jaderného potenciálu.



## 5.7 Modely jádra

První modely jádra byly zaměřeny na vysvětlení určitých experimentálních výsledků. V jejich rámci nebylo možné, zejména kvůli neúplné znalosti vnitřní struktury a sil působící mezi nukleony, vysvětlit všechny experimentální data.

### 5.7.1 Kapkový model

O jádru víme, že je v něm hmota rozložena homogenně, má dobře definovaný povrch a nukleony spolu interagují silami krátkého dosahu. Tyto znalosti vedou k představě, že jádro by mohlo mít podobnou strukturu jako krystalická látka nebo kapalina.

Přikloníme-li se k první možnosti, tak záhy zjistíme, že by jádro v základním stavu roztrhaly na kusy nenulové oscilace (jak plyne z Heisenbergových relací neurčitosti). Proto se přikloníme k druhé možnosti, tj., představujeme si jádro jako kapku tekutiny, ve které se můžou nukleony volně pohybovat, ale v jádře jsou drženy obdobou povrchového napětí u kapalin.

Tento model lze použít k vysvětlení pozorovaných vazebných energií stabilních jader. Pro zopakování uveďme, co je to vazebná energie a jak ji určíme. Vazebná energie je takové množství energie potřebné k tomu, abychom vázaný systém rozdělili na jednotlivé komponenty a ty přemístili do nekonečna. Má-li jádro  $N$  neutronů a  $Z$  protonů, pak klidová hmotnost jádra po jeho rozbití je

$$N m_n + Z m_p . \quad (5-71)$$

Je-li klidová hmotnost jádra před rozbitím  $m_J$ , pak se jeho vazebná energie spočítá jako rozdíl klidových hmot jednotlivých komponent a klidové hmotnosti jádra. Píšeme tedy

$$\frac{E_b}{c^2} = N m_n + Z m_p - m_J . \quad (5-72)$$

V chemických tabulkách však najdeme hmotnosti atomů a ne pouze jader, musíme od atomových hmotností odečíst hmotnosti elektronů v obalu, tedy

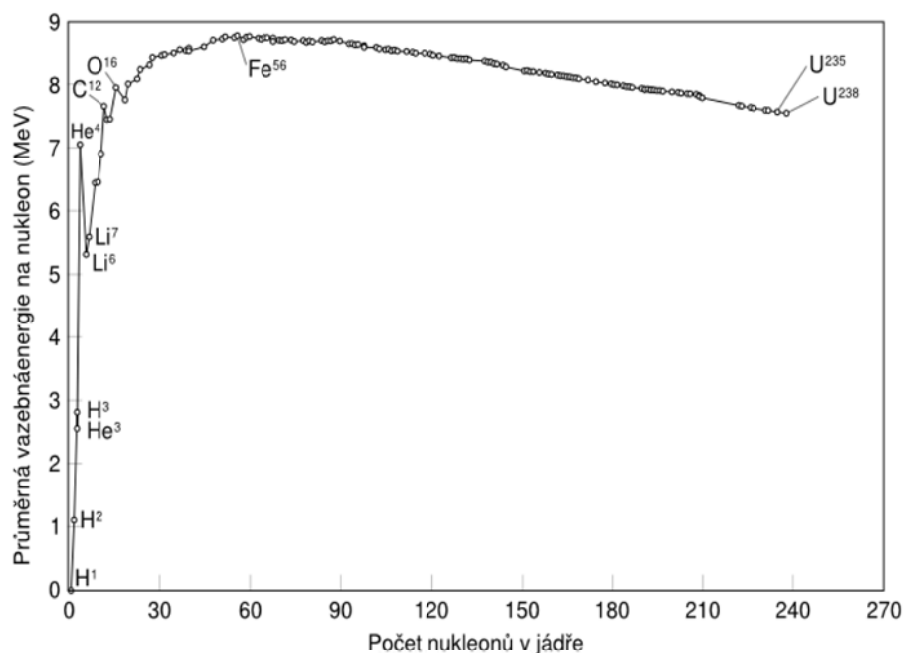
$$m_J = m_a - Z m_e . \quad (5-73)$$

Vazebná energie elektronů v obalu je v porovnání s klidovou hmotou elektronu zanedbatelná. Výraz (5-72) tedy přejde ve výraz

$$\frac{E_b}{c^2} = N m_n + Z m_p - (m_a - Z m_e) = N m_n + Z (m_p + m_e) - m_a . \quad (5-74)$$

Definujeme-li ještě vazebnou energii na jeden nukleon výrazem

$$E_{bA} = \frac{E_b}{A} \quad (5-75)$$

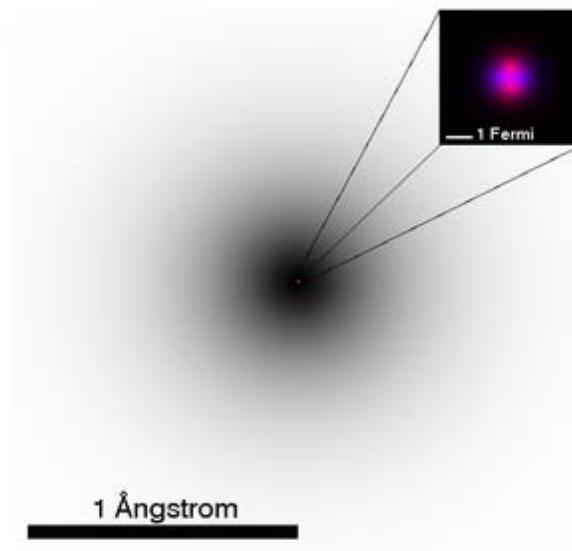


Obrázek 5-16: Vazebná energie na nukleon jako funkce nukleonového čísla  $A$ .

dostaneme závislost  $E_{bA} = E_{bA}(A)$  pro stabilní jádra. Křivka má maximum v  $A=56$ , tj. pro železo  ${}_{26}\text{Fe}^{56}$  s hodnotou vazebné energie na nukleon  $E_{bA} = 8.79$  MeV. Pro hodnoty  $A$  menší než 56 se, v křivce vyskytuje několik ostrých vrcholů. Dále si všimněme, že v intervalu  $A=20$  až 200 je vazebná energie na nukleon téměř konstantní s hodnotou kolem 8 MeV. Tato konstantnost vazebné energie na nukleon je velmi podobná vlastnostem kapaliny (k varu vody je nutné dodat energii 80 kcal / kg). Z toho lze usoudit, že důležitým efektem budou povrchové jevy. Pokud jádro v sobě váže velký počet nukleonů, pak z důvodu krátkého dosahu jaderných sil a z důvodu konstantní hustoty bude jeden nukleon uvnitř jádra interagovat pouze s některými (nejbližšími) nukleony a jeho vazebná energie bude přibližně 8 MeV. Ovšem nukleony blízko povrchu jádra budou v interakci s menším počtem dalších nukleonů než uvnitř jádra a jejich vazebná energie bude  $< 8$  MeV.

Množství energie, o kterou bude vazebná energie nukleonu v blízkosti povrchu menší než 8 MeV, by mělo být úměrné ploše povrchu jádra. Poloměr jádra je úměrný  $\sim W^{1/3}$ , kde  $W$  je atomová hmotnost jádra a tedy taky úměrná  $\sim A^{1/3}$ . Korekce na vazebnou energii u povrchu jádra pak bude úměrná  $\sim A^{2/3}$  a korekce na vazebnou energii na jeden

nukleon nakonec bude  $\sim A^{-1/3}$ . Pro menší hodnoty  $A$  hraje tento efekt velkou roli, tj. korekce na vazebnou energii je velká. To vysvětluje, proč je pro malá  $A$  vazebná energie malá. Pro velká  $A$  tento efekt už není tak důležitý, ale z obrázku vidíme, že pro velká  $A$  kolem 240 vazebná energie taky klesá pod 8 MeV. V tomto případě za tímto poklesem stojí coulombická repulze protonů v jádře.



Obrázek 5-17: Atom helia a detailní modelové vyobrazení jeho jádra. Neutrony jsou červené a protony modré (samozřejmě ve falešných barvách).

Protože má jádro  $Z$  protonů, které jsou rozmístěny uniformně, mají tyto protony tendenci se vzájemně odpuzovat, a tak působit „protivazebně“. Bude zde tedy negativní korekce na velikost vazebné energie na jednu částici, která je úměrná elektrostatické energii sférického náboje o velikosti  $Ze$ . Výraz pro tuto energii je

$$E_s = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}, \quad (5-76)$$

kde  $R$  je poloměr jádra. Protože je  $R \sim A^{1/3}$ , pak korekce na vazebnou energii na jeden nukleon je

$$\text{coulombická korekce} \sim \frac{Z^2}{A^{4/3}}. \quad (5-77)$$

Tato coulombická repulze se netýká neutronů a tedy přirozeně vychází, že stabilní těžká jádra budou obsahovat více neutronů než protonů (např.  ${}_{82}\text{Pb}^{208}$  má  $N=126$  a  $Z=82$ ).

Z (5-77) je vidět, že pro malá jádra je coulombická korekce malá a pro velká jádra velká. Když bude  $Z \rightarrow \infty$ , tak bude coulombická korekce větší než 8 MeV. Je jasné, že od určitého  $A$  nemohou díky tomuto efektu existovat stabilní jádra.

Z výše uvedených argumentů tedy musí mít v rámci kapkového modelu výraz pro vazebnou energii tvar

$$\frac{E_b}{A} = 8\text{MeV} - \frac{C_1}{A^{1/3}} - C_2 \frac{Z^2}{A^{4/3}}, \quad (5-78)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou příslušné konstanty.

### 5.7.2 Slupkový model

Slupkový model se velmi dobře osvědčil při popisu struktury elektronového obalu atomu. Elektrony mají spin  $\frac{1}{2}$  a splňují Pauliho vylučovací princip, takže v každém stavu jako 1s mohou být přítomny pouze dva elektrony s antiparalelními spiny. Experimenty s atomovými jádry naznačují, že i jádro má slupkovou strukturu. Například se ukazuje, že čísla 2, 8, 20, 50, 82 a 126 mají určitou důležitost v jaderné struktuře. Totiž vápník ( $Z=20$ ) má šest stabilních izotopů, neobvykle velký počet. Cín ( $Z=50$ ) má deset stabilních izotopů, nejvíc ze všech prvků. Největší skupina stabilních izotopů se vyskytuje pro  $N=82$ . Nejtěžší stabilní jádra jsou: olovo  $\text{Pb}^{208}$  ( $Z=82$ ,  $N=126$ ) a bismut  $\text{Bi}^{209}$  ( $N=126$ ).

Číslům 2, 8, 20, 50, 82, 126 se říká magická čísla, protože byla jejich výlučnost pro první badatele záhadná.

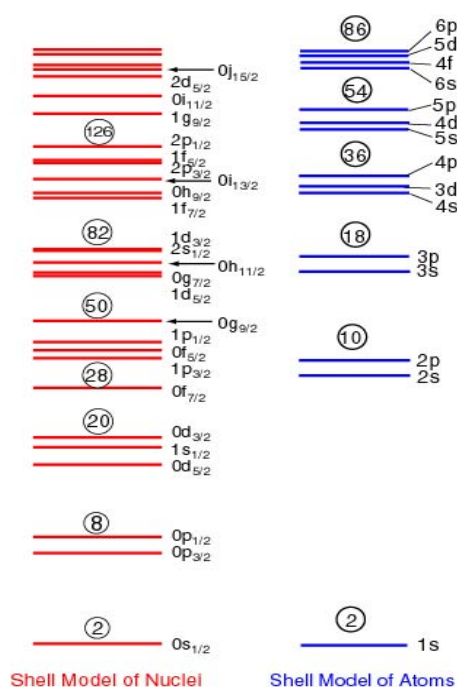
V rámci slupkového modelu mohou být tato čísla a další experimentální data přirozeně vysvětlena. Předpokládejme, že se každý nukleon pohybuje téměř nezávisle na ostatních nukleonech ve sférickém potenciálu generovaném všemi ostatními nukleony. Stavů nukleonu v tomto potenciálu popíšeme hlavním kvantovým číslem  $n$ , orbitálním momentem hybnosti ( $s, p, d, f, \dots$ ) a celkovým momentem hybnosti  $j$ . V jádře je spin-orbitální interakce velmi silná a pokud je zahrnuta, tak získáme posloupnost jedno-částicových stavů s rostoucí energií, které jsou sdruženy do slupek a podslupek přesně odpovídající experimentálním magickým číslům (tabulka 5-2).

Tabulka 5-2: Magická čísla.

| Spektroskopická konfigurace                                           | Počet stavů ve slupce | Celkový počet |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------|---------------|
| $(1s_{1/2})^2$                                                        | 2                     | 2             |
| $(2p_{3/2})^4 (2p_{1/2})^2$                                           | 6                     | 8             |
| $(3d_{5/2})^6 (3d_{3/2})^4 (2s_{1/2})^2$                              | 12                    | 20            |
| $(4f_{7/2})^8 (4f_{5/2})^6 (3p_{3/2})^4 (3p_{1/2})^2 (5g_{9/2})^{10}$ | 30                    | 50            |

|                                                                                        |    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|-----|
| $(5g_{7/2})^8 (4d_{5/2})^6 (4d_{3/2})^4 (3s_{1/2})^2 (6h_{11/2})^{12}$                 | 32 | 82  |
| $(6h_{9/2})^{10} (5f_{7/2})^8 (5f_{5/2})^6 (4p_{3/2})^4 (4p_{1/2})^2 (7i_{13/2})^{14}$ | 44 | 126 |

Při používání této tabulky je třeba mít na paměti, že proton i neutron mají spin  $\frac{1}{2}$ . Jsou to tedy fermiony a musejí splňovat vylučovací princip. Avšak protony jsou odlišitelné od neutronů, takže pokud jsou ve stavu  $1s_{1/2}$  dva protony, tak současně mohou být i dva neutrony. Tak dostáváme jádro helia  ${}^4_2\text{He}$ . Jsou-li zaplněny stavy  $(1s_{1/2})^2$ ,  $(2p_{3/2})^4$  a  $(2p_{1/2})^2$  jak protony tak neutrony, dostáváme jádro kyslíku  ${}^{16}_8\text{O}$ . Podíváme-li se pozorně na graf na obrázku 5-16, tak vidíme, že na pozicích He a O jsou lokální vrcholky (píky).



Obrázek 5-18: Porovnání slupkového modelu jádra a elektronového obalu atomu. Čísla v kroužku označují počet neutronů a protonů ve slupce (v případě jádra) a počet elektronů ve slupce (v případě elektronového obalu).

Nyní ukažme, jak tento model vysvětluje vlastnosti stabilních jader. Průměrně je počet neutronů v jádru zhruba stejný jako počet protonů. Z obrázku 5-16 je však vidět, že v případě těžkých jader je počet neutronů větší než protonů. To je dáno tím, že se u těžkých jader prosazuje coulombická repulze mezi protony. To znamená, že přidáním jednoho protonu do jádra bude potenciální energie extra protonu větší než přidáním jednoho neutronu. Potenciál, ve kterém se ve slupkovém modelu nukleony pohybují, bude hlubší, když je přidán neutron, než když byl přidán proton.

Slupkový model také dobře vysvětluje vlastnosti spinu a magnetického momentu stabilních jader. Např. pokud má jádro dva protony ve stavu  $(1s_{1/2})^2$ , pak by měl být celkový moment hybnosti nulový. Pokud má jádro sudý počet protonů, tak je vcelku přirozené, že budou vypárovány (dva v každém stavu), takže celkový spin bude nulový. Příspěvek takto vypárovaných protonů k celkovému magnetickému momentu, za předpokladu, že celkový orbitální moment hybnosti je nulový, bude taky nulový. A to se taky pozoruje. Podobně v případě sudého počtu neutronů v jádře je celkový spin a magnetický moment nulový.

Jádra se sudým počtem protonů a sudým počtem neutronů se nazývají sudé – sudé. V tabulce je ukázán počet stabilních jader v závislosti na tom, je-li počet neutronů sudý(lichý) a počet protonů sudý(lichý), viz tabulka 5-3.

| Tabulka 5-3 : Počty stabilních jader podle počtu (sudosti, lichosti) protonů a neutronů. |       |                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------|------------------------|
| Z                                                                                        | A-Z   | Počet stabilních jader |
| sudý                                                                                     | sudý  | 160                    |
| sudý                                                                                     | lichý | 56                     |
| lichý                                                                                    | sudý  | 52                     |
| lichý                                                                                    | lichý | 4                      |

Z tabulky je patrné, že nejvíce stabilních jader dostaneme v případě, že počet protonů i počet neutronů je sudý. Příklady stabilních lichý-lichý jader jsou pouze ty nejlehčí jádra  ${}_1\text{H}^1$ ,  ${}_3\text{Li}^6$ ,  ${}_5\text{B}^{10}$  a  ${}_7\text{N}^{14}$ . Jádra typu lichý-sudý, sudý-lichý mají lichý počet nukleonů a tedy nenulový spin a hodnoty momentu hybnosti potom jsou  $1/2\hbar$ ,  $3/2\hbar$ ,  $5/2\hbar$ ,  $7/2\hbar$ , ... V přírodě se vyskytují většinou pouze nižší hodnoty kvantovaných hodnot momentu hybnosti. To dokazuje vypárování nukleonů v jádře.

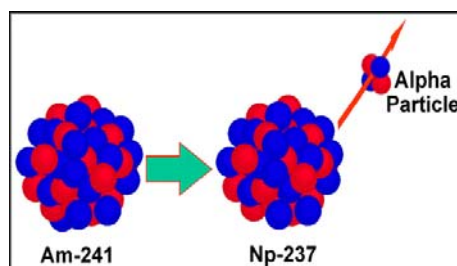
## 5.8 Transformace jader

V přírodě známe více než tisícovku jader a z nich je 270 stabilních. Nestabilní jádra se rozpadají buďto spontánně na lehčí konstituenty, nebo je nutné je ozářit svazkem částic, aby se rozpadla. Studium těchto jevů je velmi důležité pro pochopení struktury jádra.

### 5.8.1 Zákon radioaktivního rozpadu

Pokud se jádro samo spontánně rozpadá na lehčí fragmenty, říkáme tomuto jevu přirozená radioaktivita. Například jádro uranu  ${}_{92}\text{U}^{238}$  je příkladem takového jádra, které se navíc může rozpadat více různými způsoby.

Jádro při rozpadu emituje různé druhy záření:  $\alpha$  záření skládající se z jader helia  ${}_2\text{He}^4$  ( $\alpha$  rozpad),  $\beta$  záření tvořené rychlými elektrony ( $\beta$  rozpad) a  $\gamma$  záření ( $\gamma$  rozpad).

Obrázek 5-19:  $\alpha$  rozpad.

Odvoďme nyní rozpadový zákon, kterým se tento proces řídí. Tento zákon bude zřejmě mít statistický charakter. Uvažujme vzorek  $N$  jader stejného druhu. Počítáme, jaký bude počet rozpadů  $dN$  za malý časový interval  $dt$ . Protože dochází k rozpadu, bude se počet původních jader ve vzorku zmenšovat a tedy  $dN < 0$ . Experimentálně bylo zjištěno, že se během krátkého okamžiku vzorek rozpadá s konstantní rychlostí. Z toho lze usoudit, že  $-dN$  bude úměrné  $dt$ , tj.

$$-dN \sim dt \quad . \quad (5-79)$$

Dále se pozoruje, že se jádra atomu ve vzorku rozpadají nezávisle na ostatních. Pokud začneme s  $N$  jádry, pak je pozorováno  $dN$  rozpadů za čas  $dt$  a pokud začneme třeba se  $3N$  jádry, tak počet rozpadů bude třikrát větší. Z toho plyne, že  $-dN$  bude úměrné taky  $N$ . Tyto poznatky můžeme shrnout do rovnice

$$-dN = \lambda N dt \quad , \quad (5-80)$$

kde  $\lambda$  je konstanta úměrnosti nazvaná – rozpadová konstanta. Tato konstanta závisí pouze na konkrétním typu rozpadu. Integrací této rovnice dospějeme k výslednému tvaru zákona rozpadu

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \quad , \quad (5-81)$$

kde  $N_0$  je počáteční počet jader ve vzorku. Tato rovnice nám udává počet nerozpadlých jader v čase  $t$ .

### 5.8.2 Poločas rozpadu

Zavedme si důležitý pojem charakterizující rychlost rozpadu – poločas rozpadu. Ze vztahu (5-81) spočítejme, za jakou dobu se rozpadne právě polovina z původních  $N_0$  jader. Dostáváme rovnici

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 \exp(-\lambda \tau) \rightarrow \exp(\lambda \tau) = 2 \quad . \quad (5-82)$$

Logaritmováním této rovnice dostaneme výsledek

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad . \quad (5-83)$$

Tomuto času se říká poločas rozpadu.



### **SAMOSTATNÝ ÚKOL 7**

Určete, za jak dlouho se rozpadne polovina jader v radioaktivní látce, když má rozpadová konstanta hodnotu  $\lambda = 4.9 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$  .



### **SAMOSTATNÝ ÚKOL 8**

Za jakou dobu se rozpadne  $\frac{3}{4}$  jader v látce, je-li poločas rozpadu 10 let.



**ŘEŠENÁ ÚLOHA 5-3**

Spočítejte z rovnice (5-80) rozpadový zákon (5-81).

Řešení:

Rovnici (5-80) převedeme na tvar

$$dt = \frac{-dN}{\lambda N} \quad (5-84)$$

a integrací dostaneme

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln N + \ln C = \ln(C N^{-1/\lambda}) \quad (5-85)$$

Exponováním toho výsledku dostáváme výraz

$$N = C^\lambda \exp(-\lambda t) \quad (5-86)$$

Předpokládejme, že v čase  $t=0$  je ve vzorku  $N_0$  jader. Dosazením těchto počátečních podmínek do (5-86) určíme konstantu  $C^\lambda$  a nakonec dostaneme hledaný zákon rozpadu

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (5-87)$$

### 5.8.3 Zákon rozpadu pro nestabilní dceřiná jádra

Když se jádro rozpadá, například  $\alpha$  rozpadem, tak kromě emitované  $\alpha$  částice zůstává nové samozřejmě lehčí jádro, to ale nemusí být stabilní. Například když jádro uranu  ${}_{92}\text{U}^{238}$  emituje  $\alpha$  částici, zbude ještě jádro thoria  ${}_{90}\text{Th}^{234}$ . Jádro uranu se nazývá rodičovské a jádro thoria dceřiné jádro.

Za každých  $N$  jader, které se rozpadnou, zůstane jedno dceřiné jádro. Pokud v čase  $t$  máme

$$N = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (5-88)$$

jader, tak se rozpadlo  $N - N_0$  jader a tedy dceřiných jader v čase  $t$  je

$$N_D = N - N_0, \quad (5-89)$$

což nám s využitím (5-88) dá výsledek

$$N_D = N_0 [1 - \exp(-\lambda t)] . \quad (5-90)$$

Pokud je dceřiné jádro stabilní, pak počet dceřiných jader v čase  $t$  je roven počtu rozpadlých rodičovských jader v tomto čase. Ale pokud vzniklé dceřiné jádro není taky stabilní, tak počet dceřiných jader v čase bude menší než kolik udává formule (5-90). Necht' je rozpadová konstanta dceřiného jádra  $\lambda_D$ . Pokud je  $N_D$  počet dceřiných jader v čase  $t$ , pak za čas  $dt$  se rozpadne  $\lambda_D N_D dt$  dceřiných jader. Ale dceřiná jádra jsou kontinuálně vytvářena rozpadem rodičovských jader, takže celkově dostáváme

$$dN_D = \lambda_p N_p dt - \lambda_D N_D dt = [\lambda_p N_0 \exp(-\lambda_p t) - \lambda_D N_D] dt . \quad (5-91)$$

Integrací této rovnice dostáváme rozpadový zákon dceřiných jader ve tvaru

$$N_D = \lambda_p N_0 \frac{\exp(-\lambda_D t) - \exp(-\lambda_p t)}{\lambda_p - \lambda_D} . \quad (5-92)$$

Všimněme si jednoho zajímavého případu, který se v přírodě vyskytuje poměrně často, kdy se rodičovská jádra rozpadají daleko pomaleji než dceřiná. Potom je  $\lambda_p$  daleko menší než  $\lambda_D$  a rozdíl  $\lambda_p - \lambda_D$  je přibližně roven  $-\lambda_D$ . Dále výraz  $\exp(-\lambda_p t)$  je mnohem větší (pro velká  $t$ ) než  $\exp(-\lambda_D t)$ . Za těchto předpokladů se výraz (5-92) zjednoduší na vztah

$$N_D = N_0 \frac{\lambda_p}{\lambda_D} \exp(-\lambda_p t) . \quad (5-93)$$

Protože počet rodičovských jader je

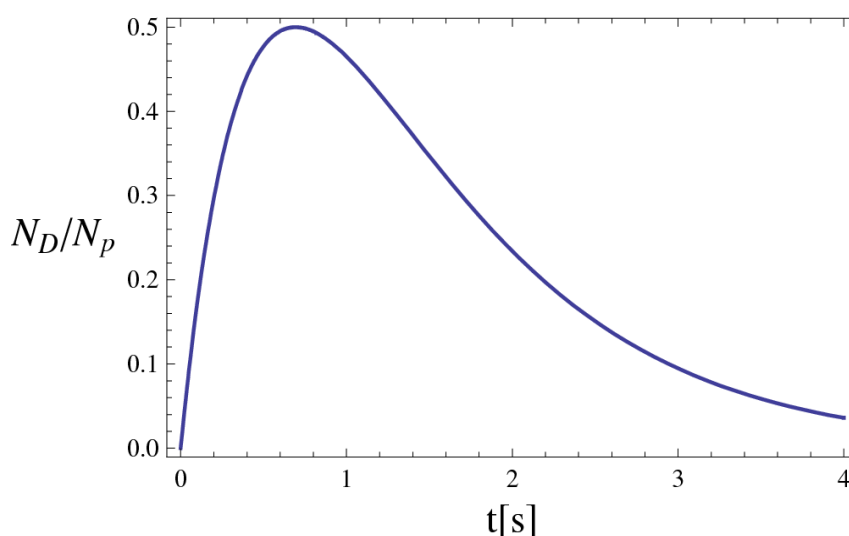
$$N_p = N_0 \exp(-\lambda_p t) \quad , \quad (5-94)$$

tak porovnáním rovnic (5-93) a (5-94) zjistíme, že po dlouhém čase  $t$  bude platit

$$N_D \lambda_D = N_p \lambda_p \quad . \quad (5-95)$$

Fyzikálně to znamená, že rychlost produkce dceřiných jader je stejná jako rychlost jejich rozpadu. To znamená že celkový přírůstek dceřiných jader bude nulový.

Pro ilustraci těchto výsledku vyobrazíme průběh počtu dceřiných jader v závislosti na čase na následujícím grafu.



Obrázek 5-20: Rozpadový zákon pro dceřiná jádra pro reprezentativní hodnoty rozpadových konstant  $\lambda_p=2$  a  $\lambda_D=1$ .

Jak je vidět z obrázku 5-20 má rozpadová funkce v našem případě jedno maximum. Počet dceřiných jader nejprve roste, protože převládá produkce dceřiných jader rozpadem rodičovských nad rozpadem dceřiných jader. Po překročení maxima je dominantní rozpad dceřiných jader, protože rodičovských jader už je málo nebo žádná.

#### 5.8.4 Radioaktivní řady

Radioaktivní prvky se  $Z > 82$ , vyskytující se přirozeně, spadají do tří radioaktivních řad. V rámci dané série se radioaktivní jádra přeměňují jedno v druhé, až dosáhnou izotopu stabilního jádra. Kromě tří přirozených sérií existuje ještě čtvrtá, která byla vyprodukovaná laboratorně.

V každé z těchto sérií se jádra rozpadají buďto  $\alpha$  rozpadem (je emitováno jádro helia) nebo  $\beta$  rozpadem (je emitován elektron). Při emisi  $\alpha$  částice se změní protonové, nukleonové a neutronové číslo následovně:  $Z$  se zmenší o 2,  $N$  se zmenší o 2 a  $A$  se zmenší o 4. Při emisi elektronu při  $\beta$  rozpadu se  $Z$  zvýší o 1, protože se zachovává náboj.  $A$  se nezmění. Takže je-li  $n$  přirozené číslo, pak pro všechny členy v dané řadě můžeme  $A$  psát ve tvaru

$$A = 4n, 4n+1, 4n+2, \text{ nebo } 4n+3. \quad (5-96)$$

Tyto rozpadové řady se nazývají thoriová, neptuniová, uranová, aktiniová. V tabulkách 5-3 až 5-6 jsou uvedeny jejich vlastnosti.

| Tabulka 5-3: Thoriová rozpadová řada ( $4n$ ) |          |                       |        |                          |
|-----------------------------------------------|----------|-----------------------|--------|--------------------------|
| Jádro                                         | Rozpad   | Poločas rozpadu       | MeV    | Produkt rozpadu          |
| ${}_{98}\text{Cf}^{252}$                      | $\alpha$ | 2.645 let             | 6.1181 | ${}_{96}\text{Cm}^{248}$ |
| ${}_{96}\text{Cm}^{248}$                      | $\alpha$ | $3.4 \times 10^5$ let | 6.260  | ${}_{94}\text{Pu}^{244}$ |
| ${}_{94}\text{Pu}^{244}$                      | $\alpha$ | $8 \times 10^8$ let   | 4.589  | ${}_{92}\text{U}^{240}$  |
| ${}_{92}\text{U}^{240}$                       | $\beta$  | 14.1 h                | 0.39   | ${}_{93}\text{Np}^{240}$ |
| ${}_{93}\text{Np}^{240}$                      | $\beta$  | 1.032 h               | 2.2    | ${}_{94}\text{Pu}^{240}$ |
| ${}_{94}\text{Pu}^{240}$                      | $\alpha$ | 6561 let              | 5.1683 | ${}_{92}\text{U}^{236}$  |
| ${}_{92}\text{U}^{236}$                       | $\alpha$ | $2.3 \times 10^7$ let | 4.494  | ${}_{90}\text{Th}^{232}$ |
| ${}_{90}\text{Th}^{232}$                      | $\alpha$ | 3.1 min               | 4.081  | ${}_{88}\text{Ra}^{228}$ |
| ${}_{88}\text{Ra}^{228}$                      | $\beta$  | 5.75 let              | 0.046  | ${}_{89}\text{Ac}^{228}$ |
| ${}_{89}\text{Ac}^{228}$                      | $\beta$  | 6.25 h                | 2.124  | ${}_{90}\text{Th}^{228}$ |
| ${}_{90}\text{Th}^{228}$                      | $\alpha$ | 1.9116 let            | 5.520  | ${}_{88}\text{Ra}^{224}$ |
| ${}_{88}\text{Ra}^{224}$                      | $\alpha$ | 3.6319 d              | 5.789  | ${}_{86}\text{Rn}^{220}$ |
| ${}_{86}\text{Rn}^{220}$                      | $\alpha$ | 55.6 s                | 6.404  | ${}_{84}\text{Po}^{216}$ |
| ${}_{84}\text{Po}^{216}$                      | $\alpha$ | 0.145 s               | 6.906  | ${}_{82}\text{Pb}^{212}$ |

|                        |                                       |           |                |                                                  |
|------------------------|---------------------------------------|-----------|----------------|--------------------------------------------------|
| $^{212}_{82}\text{Pb}$ | $\beta$                               | 10.64 h   | 0.570          | $^{212}_{83}\text{Bi}$                           |
| $^{212}_{83}\text{Bi}$ | $\beta$ (64.06%)<br>$\alpha$ (35.94%) | 60.55 min | 2.252<br>6.208 | $^{212}_{84}\text{Po}$<br>$^{208}_{81}\text{Tl}$ |
| $^{212}_{84}\text{Po}$ | $\alpha$                              | 299 ns    | 8.955          | $^{208}_{82}\text{Pb}$                           |
| $^{208}_{81}\text{Tl}$ | $\beta$                               | 3.053 min | 4.999          | $^{208}_{82}\text{Pb}$                           |
| $^{208}_{82}\text{Pb}$ | -                                     | stabilní  | -              | -                                                |

Tabulka 5-4: Neptuniová rozpadová řada ( $4n+1$ )

| Jádro                  | Rozpad   | Poločas rozpadu         | MeV   | Produkt rozpadu        |
|------------------------|----------|-------------------------|-------|------------------------|
| $^{249}_{98}\text{Cf}$ | $\alpha$ | 351 let                 | 5.813 | $^{245}_{96}\text{Cm}$ |
| $^{245}_{96}\text{Cm}$ | $\alpha$ | 8500 let                | 5.362 | $^{241}_{94}\text{Pu}$ |
| $^{241}_{94}\text{Pu}$ | $\beta$  | 14.4 let                | 0.021 | $^{241}_{95}\text{Am}$ |
| $^{241}_{95}\text{Am}$ | $\alpha$ | 432.7 let               | 5.638 | $^{237}_{93}\text{Np}$ |
| $^{237}_{93}\text{Np}$ | $\alpha$ | $2.14 \times 10^6$ let  | 4.959 | $^{233}_{91}\text{Pa}$ |
| $^{233}_{91}\text{Pa}$ | $\beta$  | 27.0 d                  | 0.571 | $^{233}_{92}\text{U}$  |
| $^{233}_{92}\text{U}$  | $\alpha$ | $1.592 \times 10^5$ let | 4.909 | $^{229}_{90}\text{Th}$ |
| $^{229}_{90}\text{Th}$ | $\alpha$ | $7.54 \times 10^4$ let  | 5.168 | $^{225}_{88}\text{Ra}$ |
| $^{225}_{88}\text{Ra}$ | $\beta$  | 14.9 d                  | 0.36  | $^{225}_{89}\text{Ac}$ |
| $^{225}_{89}\text{Ac}$ | $\alpha$ | 10.0 d                  | 5.935 | $^{221}_{87}\text{Fr}$ |
| $^{221}_{87}\text{Fr}$ | $\alpha$ | 4.8 m                   | 6.3   | $^{217}_{85}\text{At}$ |
| $^{217}_{85}\text{At}$ | $\alpha$ | 32 ms                   | 7.0   | $^{213}_{83}\text{Bi}$ |
| $^{213}_{83}\text{Bi}$ | $\alpha$ | 46.5 m                  | 5.87  | $^{209}_{81}\text{Tl}$ |
| $^{209}_{81}\text{Tl}$ | $\beta$  | 2.2 min                 | 3.99  | $^{209}_{82}\text{Pb}$ |
| $^{209}_{82}\text{Pb}$ | $\beta$  | 3.25 h                  | 0.644 | $^{209}_{83}\text{Bi}$ |

|                          |          |                          |      |                          |
|--------------------------|----------|--------------------------|------|--------------------------|
| ${}_{83}\text{Bi}^{209}$ | $\alpha$ | $1.9 \times 10^{19}$ let | 3.14 | ${}_{81}\text{Tl}^{205}$ |
| ${}_{81}\text{Tl}^{205}$ | —        | stabilní                 | -    | -                        |

Tabulka 5-5: Uranová rozpadová řada ( $4n+2$ )

| Jádro                    | Rozpad                               | Poločas rozpadu         | MeV            | Produkt rozpadu                                      |
|--------------------------|--------------------------------------|-------------------------|----------------|------------------------------------------------------|
| ${}_{92}\text{U}^{238}$  | $\alpha$                             | $4.468 \times 10^9$ let | 4.270          | ${}_{90}\text{Th}^{234}$                             |
| ${}_{90}\text{Th}^{234}$ | $\beta$                              | 24.1 d                  | 0.273          | ${}_{91}\text{Pa}^{234}$                             |
| ${}_{91}\text{Pa}^{234}$ | $\beta$                              | 6.7 h                   | 2.197          | ${}_{92}\text{U}^{234}$                              |
| ${}_{92}\text{U}^{234}$  | $\alpha$                             | 245500 let              | 4.859          | ${}_{90}\text{Th}^{230}$                             |
| ${}_{90}\text{Th}^{230}$ | $\alpha$                             | 75380 let               | 4.770          | ${}_{88}\text{Ra}^{226}$                             |
| ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ | $\alpha$                             | 1602 let                | 4.871          | ${}_{86}\text{Rn}^{222}$                             |
| ${}_{86}\text{Rn}^{222}$ | $\alpha$                             | 3.8235 d                | 5.590          | ${}_{84}\text{Po}^{218}$                             |
| ${}_{84}\text{Po}^{218}$ | $\alpha$ (99.98%)<br>$\beta$ (0.02%) | 3.1 min                 | 6.115<br>0.265 | ${}_{82}\text{Pb}^{214}$<br>${}_{85}\text{At}^{218}$ |
| ${}_{85}\text{At}^{218}$ | $\alpha$ (99.9%)<br>$\beta$ (0.1%)   | 1.5 s                   | 6.874<br>2.883 | ${}_{83}\text{Bi}^{214}$<br>${}_{86}\text{Rn}^{218}$ |
| ${}_{86}\text{Rn}^{218}$ | $\alpha$                             | 35 ms                   | 7.263          | ${}_{84}\text{Po}^{214}$                             |
| ${}_{82}\text{Pb}^{214}$ | $\beta$                              | 26.8 min                | 1.024          | ${}_{83}\text{Bi}^{214}$                             |
| ${}_{83}\text{Bi}^{214}$ | $\beta$ (99.98%)<br>$\alpha$ (0.02%) | 19.9 min                | 3.272<br>5.617 | ${}_{84}\text{Po}^{214}$<br>${}_{81}\text{Tl}^{210}$ |
| ${}_{84}\text{Po}^{214}$ | $\alpha$                             | 0.1643 ms               | 7.883          | ${}_{82}\text{Pb}^{210}$                             |
| ${}_{81}\text{Tl}^{210}$ | $\beta$                              | 1.30 min                | 5.484          | ${}_{82}\text{Pb}^{210}$                             |

|                        |                                            |           |                |                                                  |
|------------------------|--------------------------------------------|-----------|----------------|--------------------------------------------------|
| $^{210}_{82}\text{Pb}$ | $\beta$                                    | 22.3 let  | 0.064          | $^{210}_{83}\text{Bi}$                           |
| $^{210}_{83}\text{Bi}$ | $\beta$ (99.99987%)<br>$\alpha$ (0.00013%) | 5.013 d   | 1.426<br>5.982 | $^{210}_{84}\text{Po}$<br>$^{206}_{81}\text{Tl}$ |
| $^{210}_{84}\text{Po}$ | $\alpha$                                   | 138.376 d | 5.407          | $^{206}_{82}\text{Pb}$                           |
| $^{206}_{81}\text{Tl}$ | $\beta$                                    | 4.199 min | 1.533          | $^{206}_{82}\text{Pb}$                           |
| $^{206}_{82}\text{Pb}$ | -                                          | stabilní  | -              | -                                                |

Tabulka 5-6: Aktiniová rozpadová řada ( $4n+3$ )

| Jádro                  | Rozpad                                     | Poločas rozpadu        | MeV            | Produkt rozpadu                                  |
|------------------------|--------------------------------------------|------------------------|----------------|--------------------------------------------------|
| $^{239}_{94}\text{Pu}$ | $\alpha$                                   | $2.41 \times 10^4$ let | 5.244          | $^{235}_{92}\text{U}$                            |
| $^{235}_{92}\text{U}$  | $\alpha$                                   | $7.04 \times 10^8$ let | 4.678          | $^{231}_{90}\text{Th}$                           |
| $^{231}_{90}\text{Th}$ | $\beta$                                    | 25.52 h                | 0.391          | $^{231}_{91}\text{Pa}$                           |
| $^{231}_{91}\text{Pa}$ | $\alpha$                                   | 32760 let              | 5.150          | $^{227}_{89}\text{Ac}$                           |
| $^{227}_{89}\text{Ac}$ | $\beta$ (98.62%)<br>$\alpha$ (1.38%)       | 21.772 let             | 0.045<br>5.042 | $^{227}_{90}\text{Th}$<br>$^{223}_{87}\text{Fr}$ |
| $^{227}_{90}\text{Th}$ | $\alpha$                                   | 18.68 d                | 6.147          | $^{223}_{88}\text{Ra}$                           |
| $^{223}_{87}\text{Fr}$ | $\beta$                                    | 22.00 min              | 1.149          | $^{223}_{88}\text{Ra}$                           |
| $^{223}_{88}\text{Ra}$ | $\alpha$                                   | 11.43 d                | 5.979          | $^{219}_{86}\text{Rn}$                           |
| $^{219}_{86}\text{Rn}$ | $\alpha$                                   | 3.96 s                 | 6.946          | $^{215}_{84}\text{Po}$                           |
| $^{215}_{84}\text{Po}$ | $\alpha$ (99.99977%)<br>$\beta$ (0.00023%) | 1.781 ms               | 7.527<br>0.715 | $^{211}_{82}\text{Pb}$<br>$^{215}_{85}\text{At}$ |
| $^{215}_{85}\text{At}$ | $\alpha$                                   | 0.1 ms                 | 8.178          | $^{211}_{83}\text{Bi}$                           |
| $^{211}_{82}\text{Pb}$ | $\beta$                                    | 36.1 m                 | 1.367          | $^{211}_{83}\text{Bi}$                           |
| $^{211}_{83}\text{Bi}$ | $\alpha$ (99.724%)<br>$\beta$ (0.276%)     | 2.14 min               | 6.751<br>0.575 | $^{207}_{81}\text{Tl}$<br>$^{211}_{84}\text{Po}$ |
| $^{211}_{84}\text{Po}$ | $\alpha$                                   | 516 ms                 | 7.595          | $^{207}_{82}\text{Pb}$                           |
| $^{207}_{81}\text{Tl}$ | $\beta$                                    | 4.77 min               | 1.418          | $^{207}_{82}\text{Pb}$                           |



|                          |   |          |   |   |
|--------------------------|---|----------|---|---|
| ${}_{82}\text{Pb}^{207}$ | - | stabilní | - | - |
|--------------------------|---|----------|---|---|

## 5.9 Rozpadové mechanizmy

V této podkapitole podrobněji rozebereme mechanizmy, které vedou ke spontánnímu rozpadu těžkých jader.

### 5.9.1 Alfa rozpad

Při spontánním rozpadu získávají produkty kinetickou energii. Ta musí jít na účet energie v jiné formě. To můžeme kvantitativně podchytit výpočtem celkové ztráty klidové energie vzniklých produktů.

Je-li rodičovské jádro na začátku  $\alpha$  rozpadu v klidu, pak produkty odnášejí kinetickou energii, aby se zachovala celková hybnost. Necht' má rodičovské jádro klidovou hmotnost  $M_R$ , dceřiné jádro klidovou hmotnost  $M_D$  a  $\alpha$  částice hmotnost  $M_\alpha$ . Označme úbytek klidové hmotnosti v procesu  $Q$ . Pro tento úbytek zřejmě platí

$$\frac{Q}{c^2} = M_J - M_\alpha - M_D \quad . \quad (5-97)$$

Hmotnosti jader budeme opět počítat z tabulkových hodnot atomových hmotností příslušného prvku, tj.

$$M_J = M_{J(at)} - Z m_e \quad , \quad (5-98)$$

$$M_\alpha = M_{2\text{He}4} - 2 m_e \quad (5-99)$$

a

$$M_D = M_{D(at)} - (Z - 2)m_e, \quad (5-100)$$

kde  $m_e$  je klidová hmotnost elektronu. Dosazením výrazů (5-98) – (5-100) do (5-97) dostaneme pro hmotnostní úbytek  $Q$  výraz

$$\frac{Q}{c^2} = M_{J(at)} - M_{2\text{He}4} - M_{D(at)}. \quad (5-101)$$



#### ŘEŠENÁ ÚLOHA 5-4

Určete hmotnostní úbytek při alfa rozpadu jádra uranu  ${}_{92}\text{U}^{238}$  na jádro thoria  ${}_{90}\text{Th}^{234}$ .

Řešení:

Z chemických tabulek zjistíme, že atomové hmotnosti jader v zadání jsou:

produkty

$$M_{D(at)} = M_{90\text{Th}234} = 234.043583, \quad ,$$

$$M_{2\text{He}4} = 4.002603, \quad ,$$

rodičovské jádro

$$M_{R(at)} = M_{92\text{U}238} = 238.046186.$$

Dosazením těchto hodnot do (5-101) dostáváme

$$\frac{Q}{c^2} = 0.00458 \text{ amu}.$$

Protože je  $1 \text{ amu} = 931.48 \text{ MeV}$ , tak nakonec dostáváme pro hmotnostní úbytek tohoto procesu výsledek

$$Q = 4.27 \text{ MeV}.$$

Při tomto procesu je pozorovaná energie alfa částice 4.18 MeV. Část energie musí odnést dceřiné jádro.

V řešené úloze jsme zjistili, porovnáním s experimentem, jakou část kinetické energie odnáší dceřiné jádro. Nyní zkusme analyticky určit, jak se hmotnostní úbytek rozdělí mezi alfa částici a dceřiné jádro.

Celková kinetická energie produktů je v nerelativistické oblasti. Můžeme tedy k určení rozložení kinetické energie mezi produkty procesu vystačit s Newtonovským vyjádřením kinetické energie.

Označme rychlosti produktů  $v_D$  a  $v_\alpha$ . Hmotnosti produktů budou v tomto případě úměrné jejich klidovým hmotnostem přibližně  $M_D = A-4$  a  $M_\alpha = 4$ . Z požadavku zachování hybnosti dostáváme výraz

$$(A-4)v_D = 4v_\alpha \rightarrow \frac{v_\alpha}{v_D} = \frac{A-4}{4} . \quad (5-102)$$

Pro poměr kinetických energií obou produktů dostaneme

$$\frac{T_\alpha}{T_D} = \frac{\frac{1}{2}4v_\alpha^2}{\frac{1}{2}(A-4)v_D^2} = \frac{A-4}{4} , \quad (5-103)$$

kde jsme v posledním kroku použili výraz (6-51). Vyjádříme nyní pomocí kinetických energií produktů hmotnostní úbytek  $Q$ , dostáváme formuli

$$Q = T_\alpha + T_D = T_\alpha + \frac{4T_\alpha}{A-4} = \frac{A}{A-4} T_\alpha . \quad (5-104)$$

V řešené úloze 5-4 jsme spočítali, že  $Q = 4.27$  MeV. V případě uranu  ${}_{92}\text{U}^{238}$  je  $A = 238$ , takže dosazením do (5-104) dostáváme, že kinetická energie alfa částice má hodnotu  $T_\alpha = 4.19$  MeV. Tato hodnota docela dobře souhlasí s experimentální hodnotou 4.18 MeV. Ještě poznamenejme, že vzniklé jádro thoria má potom kinetickou energii asi 0.08 MeV.

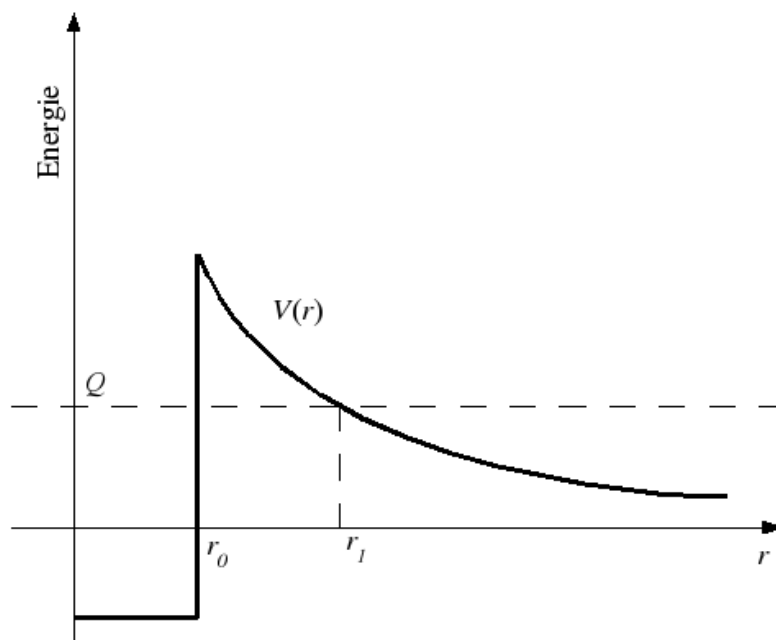
### 5.9.2 Teorie alfa rozpadu

Uvažujme potenciální energii mezi alfa částicí a dceřiným jádrem s nábojem  $Z-2$  a hmotnostním čísle  $A-4$  uvnitř rodičovského jádra (tj. do  $r_0$ ) za konstantní a vně  $r_0$  danou výrazem

$$V = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5-105)$$

Průběh této potenciální energie je vyneseno do grafu na obrázku 5-21.





Obrázek 5-21: Potenciální energie mezi dceřiným jádrem a alfa částicí.

Skutečná energie alfa částice je  $Q$  a v grafu je naznačena horizontální čárkovanou linií. Alfa částice, která se nachází v oblasti  $r < r_0$ , nemůže klasicky z jádra uniknout. Její energie je menší než výška potenciálové bariéry. Ovšem podle kvantové mechaniky je vlnová funkce alfa částice vně jádra malá, ale nenulová. Částice se může protunelovat ven skrz potenciálovou bariéru.

Spočítejme, jaká je výška potenciálové bariéry na  $r_0$  v případě thoria  ${}_{90}\text{Th}^{230}$ . Coulombická potenciální energie má, vyjádřena v MeV, tvar

$$V = \frac{2.88(Z-2)}{r} \quad , \quad (5-106)$$

kde  $r$  dosazujeme v jednotkách fermi. Pro proces emise alfa částice se ukazuje, že  $r_0$  by mělo být

$$r_0 = 1.4(A-4)^{1/3} \text{ fermi} \quad . \quad (5-107)$$

Coulombická potenciální energie má potom na  $r_0$  tvar

$$V_0 = 2.06 \frac{Z-2}{(A-4)^{1/3}} \text{ MeV} . \quad (5-108)$$

Dosadíme, v případě thoria  ${}_{90}\text{Th}^{230}$ , za  $Z=90$  a  $A=230$  a zjistíme, že hodnota potenciální bariéry má v tomto případě hodnotu

$$V_0 = 29.8 \text{ MeV} , \quad (5-109)$$

což je velká hodnota v porovnání s hodnotou  $Q$ , která je v řádu několika MeV.

Na tomto příkladu jsme si ukázali, že alfa částice nemůže „klasicky“ opustit jádro. V dalším budeme hledat relativní velikosti vlnových funkcí na obou stranách bariéry.

Předpokládejme, že jsou alfa částice emitovány izotropně z jádra a tedy hledaná vlnová funkce bude pouze funkcí radiální souřadnice  $r$ . Schrödingerova rovnice systému alfa částice – dceřiné jádro (alfa-d) má tvar

$$\frac{1}{2\mu} p_r^2 \psi(r) + V(r) \psi(r) = Q \psi(r) , \quad (5-110)$$

kde je  $p_r$  radiální komponenta hybnosti a  $\mu$  je redukovaná hmotnost daná přibližně vztahem

$$\mu = \frac{M_\alpha M_D}{M_\alpha + M_D} \simeq \frac{M_\alpha (A-4)}{A} . \quad (5-111)$$

Řešením této rovnice zjistíme, že

$$\psi = \frac{\text{konst}}{r} \exp \left( - \int_{r_0}^r dr \frac{\sqrt{2\mu(V-Q)}}{\hbar} \right) . \quad (5-112)$$

Pomocí vlnové funkce (5-112) můžeme určit počet alfa částic, které protunelují potenciálovou bariéru a jsou emitovány. Spočítejme poměr počtu částic ve slupce  $4\pi r_1^2 dr$  ku počtu alfa částic ve slupce  $4\pi r_0^2 dr$ . Celkový počet částice ve slupce na  $r_1$  tedy bude  $|\psi(r)|^2 4\pi r_1^2 dr$  a na  $r_0$  bude  $|\psi(r)|^2 4\pi r_0^2 dr$ . Potom pro poměr obou počtů dostáváme

$$\frac{4\pi \Phi(r_1)^2 dr}{4\pi \Phi(r_0)^2 dr} = \exp \left[ -2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{\sqrt{2\mu(V-Q)}}{\hbar} \right] , \quad (5-113)$$

kde jsme zavedli  $\Phi(r) = r|\psi(r)|$ . Pro tento poměr zavedeme označení  $e^{-\Gamma}$ ,  $\Gamma$  je

$$\Gamma = 2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{\sqrt{2\mu(V-Q)}}{\hbar} dr. \quad (5-114)$$

Po dosazení za potenciální energii  $V$  ze vztahu (5-105) dostáváme výraz

$$\Gamma = \frac{w}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2\mu \left[ \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - Q \right]} dr. \quad (5-115)$$

Zavedeme-li parametr  $\gamma$  vztahem

$$\gamma \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 r_0 Q}{2(Z-2)e^2}, \quad (5-116)$$

pak integrací výrazu v (5-115) dostáváme výsledek

$$\Gamma = 2.53 \sqrt{\frac{A-4}{A}} \frac{Z-2}{\sqrt{Q}} \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}} - \sqrt{\gamma(1-\gamma)} \right], \quad (5-117)$$

kde  $Q$  je v jednotkách MeV, faktor  $2.53 = 4e^2 \sqrt{2m_\alpha} / (4\pi\epsilon_0 \hbar)$  a faktor  $\sqrt{(A-4)/A}$  pochází ze vztahu pro redukovanou hmotnost (5-111).



### ŘEŠENÁ ÚLOHA 5-5

Určete parametr  $\Gamma$  pro alfa rozpad thoria  ${}_{90}\text{Th}^{230}$ .

Řešení:

Analogickým postupem jako v řešené úloze 5-4 určíme, že pro alfa rozpad thoria  ${}_{90}\text{Th}^{230}$  je hmotnostní úbytek

$$Q = 4.82 \text{ MeV}. \quad (5-118)$$

Dále, užitím vztahu (5-108), jsme obdrželi hodnotu potenciálové bariéry

$$V_0 = 29.8 \text{ MeV}. \quad (5-119)$$



Z těchto hodnot užitím (5-106) snadno určíme faktor  $\gamma$ , který je roven

$$\gamma = \frac{4.82}{29.8} = 0.1617 \quad (5-120)$$

Dosazením  $A=230$ ,  $Z=90$ ,  $Q$  a  $\gamma$  do (5-117) zjistíme, že hodnota parametru  $\Gamma$  je

$$\Gamma = 79.4 \quad (5-121)$$

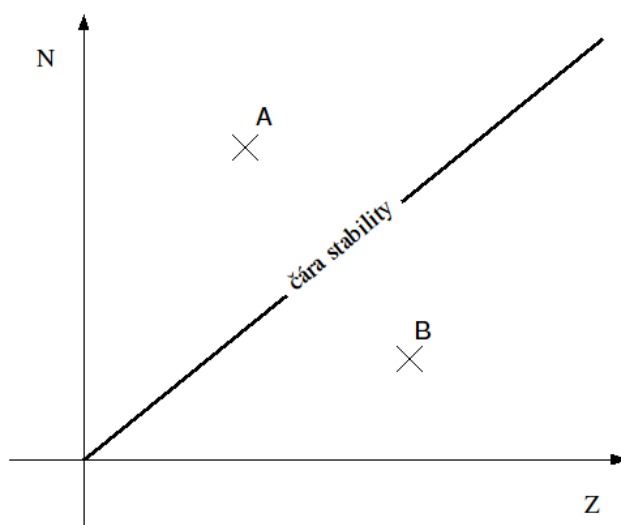
Tato hodnota nám poskytuje informaci o tom, jaký je poměr mezi počtem alfa částic na okraji potenciálové bariéry  $r_0$  a vně potenciálové bariéry  $r_1$ . Stačí dosadit do (5-113). Zjistíme, že poměr je sice velmi malý, ale nenulový.

### 5.9.3 Beta rozpad

Nestabilní jádra, která mají nadbytek neutronů, tj. jádra která leží v rovině  $Z$ - $N$  nad linií stability, se přednostně rozpadají beta rozpadem, při kterém je vyzářen elektron a antineutrino. Nejjednodušší takový proces je rozpad volného neutronu (neutronu, který není vázán v některém jádře). Rovnice tohoto procesu se zapíše

$${}_0n^1 \rightarrow {}_1p^1 + e^- + \bar{\nu} \quad (5-122)$$

Protože je při tomto beta rozpadu emitován elektron, nese tento proces označení  $\beta^-$ .



Obrázek 5-22: Čára stability. Tato linie v rovině Z-N odděluje nestabilní jádra, která se rozpadají přednostně  $\beta^-$  rozpadem (A) a jádra, která se přednostně rozpadají  $\beta^+$  rozpadem (B).

Podobně jádra pod čarou stability při rozpadu budou emitovat pozitron a neutrino. Příkladem tohoto procesu je rozpad jádra  ${}^7_{12}\text{N}$



kde  $e^+$  je pozitron. Tento typ beta rozpadu se označuje  $\beta^+$ .

Při těchto procesech jsou splněny všechny zákony zachování, které jsme až dosud diskutovali a dále ještě některé nové. Zákon zachování náboje je v rovnicích vyjádřen shodnou sumou nábojů na levé i pravé straně rovnice reakce. Například v rovnici (5-122) je na levé straně počet kladného elementárního náboje 7 a na pravé straně rovnice 6+1 (neutrino je neutrální). Dále se při beta rozpadu zachovává nukleonové číslo  $A$ . To znamená, že se nemění součet  $Z + N$ . Při beta rozpadu máme další, nový zákon zachování – zachování celkového počtu nukleonů v jádře.

Podívejme se nyní, jak vypadá zákon zachování hmotnosti-energie při beta rozpadu. Jakmile se jádro spontánně rozpadne beta rozpadem, je součet hmotností produktů reakce menší než hmotnost rodičovského jádra. Hmotnostní úbytek  $Q$  je konvertován do kinetické energie produktů. Největší část této energie odnáší elektron a neutrino. Označme hmotnost rodičovského jádra  $M_R$ , hmotnost elektronu  $m_e$  a hmotnost dceřiného jádra  $M_D$ . Zákon zachování hmoty-energie pak píšeme ve tvaru

$$M_R = M_J + m_e + \frac{Q}{c^2} . \quad (5-124)$$

Opět připomeňme, že v tabulkách jsou uvedeny atomové hmotnosti, tj.

$$M_{R(at)} = M_R - Z m_e \quad (5-125)$$

a

$$M_{J(at)} = M_J - (Z-1)m_e . \quad (5-126)$$

Dosazením těchto výrazů do rovnice (5-124) dostáváme rovnici

$$M_{R(at)} = M_{J(at)} + \frac{Q}{c^2} . \quad (5-127)$$

Odtud je ihned vidět, že hmotnost rodičovského jádra musí být větší než dceřiného při beta rozpadu, kdy je emitován elektron a antineutrino.  $Q$  totiž v takovém případě musí být větší než nula.

Další dva zákony zachování, které budeme studovat, vedou k tomu, že neutrino (antineutrino) musejí být součástí produktů beta rozpadů. Podívejme se opět na rovnici (5-122). Na levé straně této rovnice je neutron, který má spin  $\frac{1}{2}$ , na pravé straně je proton, má spin  $\frac{1}{2}$  i elektron, má spin  $\frac{1}{2}$ . Kdyby nebylo přítomno neutrino taky se spinem  $\frac{1}{2}$ , tak by byl porušen *zákon zachování momentu hybnosti*. Připomeňme, že moment hybnosti částic je kvantován a jeho velikost je rovna

$$S = \hbar \sqrt{s(s+1)} . \quad (5-128)$$

Dále se podívejme, jakou roli hraje zákon zachování hybnosti při beta rozpadech. Kdyby byly na konci rozpadu neutronu v reakci (5-121) pouze dva produkty,  $p'$  a  $e^-$ , pak by v systému spojeném s centrem hmot měly hybnosti obou produktů stejnou velikost hybnosti ale opačného směru, protože v takovém systému je iniciální hybnost nulová. Dále je jasné, že suma kinetických energií obou produktů musí být rovna  $Q$ .

Z těchto informací lze ihned usoudit, že energie elektronu při beta rozpadu musí být kvantována, stejně jako energie alfa částice při alfa rozpadu. Experimenty ale ukazují, že energie elektronu se mění spojitě od 0 do  $Q$ . To znamená, že mezi produkty musí být navíc ještě aspoň jedna částice.

### 5.9.4 Fázový prostor a teorie beta rozpadu

V grafu na obrázku 5-23 je zachycena závislost relativního počtu elektronů při beta rozpadu india  ${}_{49}\text{In}^{114}$  na jejich kinetické energii. Podobné výsledky byly pozorovány i při dalších beta rozpadech.

Zkusme najít fyzikální argumenty, které povedou k vysvětlení tohoto grafu. Vyjděme z následujících předpokladů:

1. hmotnost antineutrína je nulová a jeho hybnost můžeme psát ve tvaru

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} . \quad (5-129)$$

Podobně, v případě elektronu s kinetickou energií  $T_e$ , hmotností  $m_e$  a hybností  $p_e$  máme relativistický výraz pro jeho hybnost

$$p_e = \frac{\sqrt{T_e^2 + 2 T_e m_e c^2}}{c} . \quad (5-130)$$

2. Dále uvažujme, že pravděpodobnost nalezení částice v daném intervalu hybností je určena dostupností finálních stavů. Můžeme tedy předpokládat, že pravděpodobnost bude úměrná příslušnému objemu v prostoru hybností a píšeme

$$d\Gamma = (dp_x dp_y dp_z)_\nu (dp_x dp_y dp_z)_e . \quad (5-131)$$

3. Nakonec předpokládáme, že mezi směry pohybu elektronu a antineutrína není žádný vztah, a tedy můžeme použít v prostoru hybností sférické souřadnice, což nám dá výraz

$$d\Gamma = (4\pi p_\nu^2 dp_\nu) (4\pi p_e^2 dp_e) . \quad (5-132)$$

Dosazením z (5-129) a (5-130) do (5-132) získáme pro  $d\Gamma$  výraz

$$d\Gamma = 16\pi^2 \frac{E_\nu^2}{c^3} dE_\nu \left( \frac{\sqrt{T_e^2 + 2 T_e m_e c^2}}{c^3} (T_e + m_e c^2) dT_e \right) . \quad (5-133)$$

Nyní postupujme takto. Protože je hmotnost dceřiného jádra při beta rozpadu daleko větší než hmotnost elektronu a antineutrína, tak velká většina hmotnostního úbytku  $Q$  bude konvertována na kinetickou energii elektron a antineutrína, a tedy máme

$$Q = E_\nu + T_e \rightarrow E_\nu = Q - T_e \quad (5-134)$$

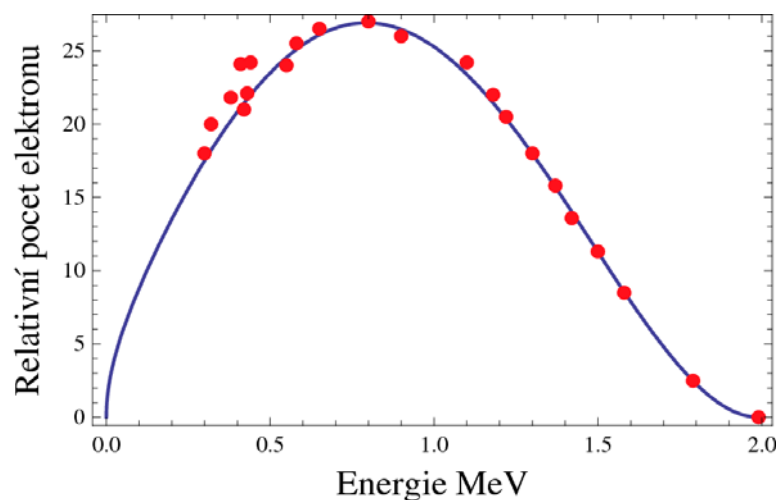
Dosazením tohoto výsledku do (6-5-133) a integrací dostáváme pro počet elektronů emitovaných při beta rozpadu při dané kinetické energii výsledek

$$n_e \propto (Q - T_e)^2 \sqrt{T_e^2 + 2T_e m_e c^2} (T_e + m_e c^2) \quad (5-135)$$

Pro beta rozpad india  ${}_{49}\text{In}^{114}$  je  $Q=1.09$  MeV. Průběh této funkce je vykreslen v grafu na obrázku 5-23 a velmi dobře souhlasí s experimentálními výsledky.







Obrázek 5-23: Relativní počet elektronů v závislosti na jejich kinetické energii při beta rozpadu jádra  ${}_{49}\text{In}^{114}$ . Červené tečky reprezentují experimentální data a modrá křivka je teoretická funkce daná výrazem (6-84).

#### 5.9.4.1 Záchyt elektronů

Reakce podobná beta rozpadu je zachycení elektronu z obalu jádrem a přitom se vyzáří neutrino. Jedná se o elektrony z K slupky, které stráví více času v blízkosti jádra než jiné elektrony. Takovou reakci zapíšeme ve tvaru rovnice

$$e^{-} + {}_Z P^A \rightarrow {}_{Z-1} D^A + \nu \quad . \quad (5-136)$$

Rovnici zachování hmoty- energie napíšeme ve tvaru

$$m_e + (M_P - Z m_e) = [M_D - (Z-1) m_e] + \frac{Q}{c^2} \quad , \quad (5-137)$$

nebo ve tvaru

$$M_P = M_D - \frac{Q}{c^2} \quad . \quad (5-138)$$

V tomto případě má reakce pouze dva produkty, a tak jejich energie musí být diskrétní. Přesná měření tento výsledek potvrzují.



### 5.9.5 Gama rozpad a vnitřní přeměna

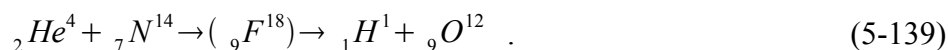
Pokud je jádro bombardováno částicemi, může být excitováno na vyšší energetickou úroveň, podobně jako elektrony v elektronovém obalu. Pokud navíc dochází k alfa nebo beta rozpadu, tak může dceřiné jádro být v excitovaném stavu. Potom při návratu do základního stavu může jádro emitovat foton.

Energie těchto fotonů je v řádu 1 MeV, což je v porovnání s řádem eV v elektronovém obalu obrovská energie. Těmto fotonům se říká gama fotony.

### 5.9.6 Nízkoenergetické jaderné reakce

Uvažujme nyní nejjednodušší typ jaderné reakce, při které interagují dvě částice a výsledkem této reakce jsou zase dvě částice s malou kinetickou energií. Hraniční hodnotou, která rozhodne, zda je energie ještě malá nebo už velká, bude, řekněme, 50 MeV. Poznamenejme, že nejjednodušší jaderná částice (proton) má klidovou energii 938 MeV.

Typická dvoučásticová reakce je



V této reakci alfa částice z bombardujícího svazku se dočasně zkombinují s jádrem dusíku na jádro fluoru, které je vysoce nestabilní a rozpadá se na vodík a kyslík.

Parametrem, kterým charakterizujeme jaderné reakce, je parametr  $Q$ , který je definován jako rozdíl mezi klidovou energií iniciálních částic a finální klidovou energií produktů reakce.

Nechť jsou hmotnosti iniciálních jader  $m$  a  $M$ . Jádro o hmotnosti  $M$  nechť je v klidu a jádro  $m$  dopadá na  $M$  rychlostí  $v \ll c$ , a tedy s kinetickou energií  $\frac{1}{2}mv^2$ . Produkty nechť mají klidové hmotnosti  $m'$  a  $M'$ , pak pro parametr  $Q$  dostáváme rovnici

$$Q = (m + M - m' - M')c^2 . \quad (5-140)$$

Protože po vyjádření jaderných hmotností pomocí atomových tabulkových hmotností se elektrony v rovnici (5-140) vyruší, platí tato rovnice přímo i pro příslušné atomové hmotnosti.

Označíme-li ještě kinetické energie iniciální částice  $T$  a finálních částice  $T_{m'}$  a  $T_{M'}$ , pak dostáváme rovnici

$$T + (m + M)c^2 = (m' + M')c^2 + T_{m'} + T_{M'} , \quad (5-141)$$

a tedy výraz pro  $Q$  obsahující pouze kinetické energie má tvar

$$Q = T_{m'} + T_{M'} - T \quad . \quad (5-142)$$

V následujících řešených úlohách jsou vysvětleny pojmy: endotermická reakce, exotermická reakce.



### ŘEŠENÁ ÚLOHA 5-6

Spočtěte v MeV hodnotu faktoru  $Q$  reakce (5-139) užitím tabulek atomových hmotností z tabulek.

Řešení:

Nejprve najdeme příslušné atomové hmotnosti iniciálních a finálních částic.

Hmotnost helia  ${}_2\text{He}^4$ ,  $m = 4.00260131$  amu,  
 hmotnost dusíku  ${}_7\text{N}^{14}$ ,  $M = 14.0030744$  amu,

hmotnost vodíku  ${}_1\text{H}^1$ ,  $m' = 1.007825$  amu,  
 hmotnost kyslíku  ${}_8\text{O}^{17}$ ,  $M' = 16.999133$  amu

a dostáváme

$m + M = 18.0056775$  amu,  
 $m' + M' = 18.006958$  amu,

takže

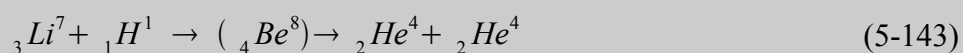
$$Q = (931)(18.0056775 - 18.006958) = -1.19 \text{ MeV}.$$

To, že je výsledek záporný, znamená, že při reakci byl vytvořen přírůstek klidové hmoty a že příslušná část kinetické energie při této reakci zmizela. Jedná se o tzv. *endotermickou reakci*.

### ŘEŠENÁ ÚLOHA 5-7



Spočítejme parametr Q reakce



Řešení:

Postupujeme analogicky jako v příkladu 5-6.

Nejprve najdeme příslušné atomové hmotnosti iniciálních a finálních částic.

Hmotnost lithia  ${}^7_3\text{Li}$ ,  $m = 7.016004$  amu,  
hmotnost vodíku  ${}^1_1\text{H}$ ,  $M = 1.007825$  amu,

dvakrát hmotnost helia  ${}^4_2\text{He}$ ,  $m' + M' = 8.005206$  amu,

a celkem dostáváme

$m + M = 8.023829$  amu,  
 $m' + M' = 8.005206$  amu,

takže

$Q = (931)(8.023829 - 8.005206) = +17.3$  MeV.

Jedná se o exotermickou reakci, je získána kinetická energie. Nebo takto, kinetická energie produktů je větší než kinetická energie iniciálních částic, jak plyne z (5-142).

### 5.9.7 Práh energie

K tomu, aby proběhla endotermická reakce, musí být systému dodána kinetická energie. Pokud je kinetická energie dopadající částice menší než  $Q$ , tak příslušná endotermická reakce nemůže proběhnout. Hodnota  $Q$  ovšem není dolní hranicí pro  $T$ , od které už endotermická reakce probíhá. Je třeba dodat ještě navíc přírůstek kinetické energie tak, aby byl zachován moment hybnosti a to z toho důvodu, že vznikající částice nejsou v klidu.

Celková kinetická energie systému částic může být napsána jako součet kinetické energie centra hmot a kinetické energie pohybu částic vůči centru hmot. Kinetická energie centra hmot je

$$T_{C.Hm} = \frac{1}{2}(m' + M')V^2, \quad (5-144)$$

kde  $V$  je rychlost centra hmot. Tato rychlost je nenulová, protože se musí zachovávat hybnost, tj., platí

$$mv = (m' + M')V. \quad (5-145)$$

Vyjádříme-li  $V$  z (5-145) a dosadíme do (5-144), dostaneme pro kinetickou energii centra hmot výraz

$$T_{C.Hm} = \frac{m}{m' + M'}T, \quad (5-146)$$

kde  $T = \frac{1}{2}mv^2$ . Dostáváme tak následující podmínku pro práh kinetické energie dopadající částice, od kterého už může endotermická reakce probíhat ve tvaru

$$T = |Q| + T_{C.Hm} = -Q + \frac{m}{m' + M'}T. \quad (5-147)$$

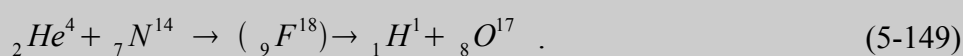
Při této energii je kinetická energie produkovaných částic vzhledem k centru hmot nulová, a tak dostáváme výsledek

$$T = T_{prah} = -\frac{m' + M'}{m' + M' - m}Q. \quad (5-148)$$

### ŘEŠENÁ ÚLOHA 5-8



Určete prahovou energii pro reakci



Řešení:

Hodnoty hmotností příslušných atomů už máme uvedeny v příkladu 5-6. Zjistili jsme, že je

$$Q = 1.19 \text{ MeV} \quad (5-150)$$

a dále jsme zjistili, že

$$m' + M' \simeq 18 \text{ amu} \quad (5-151)$$

Potom dostáváme, že

$$m' + M' - m \simeq 14 \text{ amu} \quad (5-152)$$

Za předpokladu, že je  ${}^7\text{N}^{14}$  na začátku reakce v klidu, dostáváme pro prahovou energii endotermické reakce hodnotu

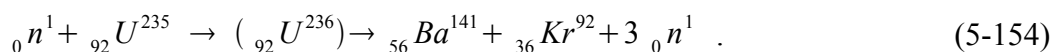
$$T_{\text{prah}} = (18/14)(1.19) = 1.53 \text{ MeV} \quad (5-153)$$

## 5.10 Jaderné štěpení a jaderná slučování (fúze)

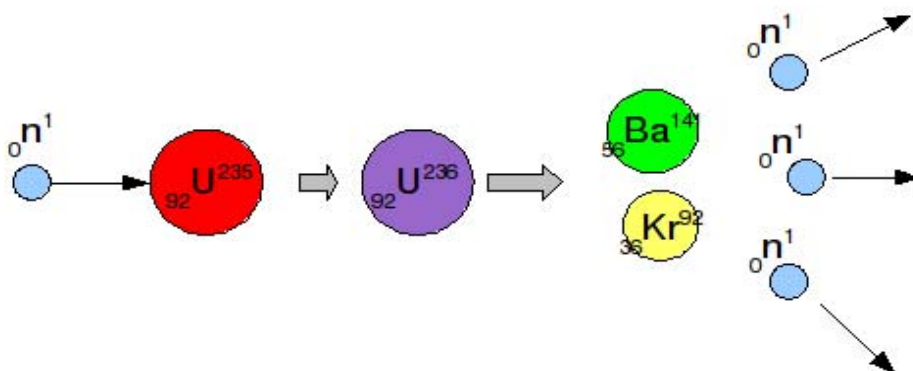
V této kapitole se seznámíme se dvěmi velmi důležitými jadernými reakcemi. První bude jaderné štěpení, při kterém se těžká nestabilní jádra štěpí (dělí) na lehčí jádra a další produkty. Druhou reakcí bude naopak slučování lehčích jader a tím tvorba jader s větším nukleonovým číslem.

### 5.10.1 Jaderné štěpení

Při jaderném štěpení mají lehčí jádra vazebnou energii na jeden nukleon větší než v případě rodičovského jádra. Typickým příkladem takové reakce je štěpení uranu  ${}_{92}\text{U}^{235}$ . Rovnice této reakce je následující



Při tomto procesu vazebná energie na nukleon roste a z toho plyne, že se uvolňuje kinetická energie. Faktor  $Q$  této štěpné reakce je 200 MeV.



Obrázek 5-24: Schématické vyobrazení štěpné reakce uranu  ${}_{92}\text{U}^{235}$ .

Aby mohla tato reakce proběhnout, tak nejprve musí zasáhnout jádro uranu neutron s dostatečnou kinetickou energií, která je větší než prahová energie této jaderné reakce. Toto jádro se rozštěpí na dvě lehčí jádra a tři neutrony. Tyto neutrony mohou zasáhnout další tři

uranová jádra a spustit jejich štěpnou reakci, atd. . Takové reakci se říká řetězová reakce. Při ní je uvolněno obrovské množství energie (při každém štěpení 200 MeV).

Je tady ovšem jeden problém, který je nutno vyřešit pro praktickou aplikaci řetězové reakce. Při tomto štěpení mají emitované neutrony energii více než 1 MeV a patří do skupiny tzv. rychlých neutronů. Rychlé neutrony mají malý účinný průřez toho, že budou při srážce s uranovým jádrem pohlceny. Větší účinný průřez pohlcení mají tzv. tepelné neutrony s energiemi řádu několika eV. Proto je třeba, např. v jaderných reaktorech, tyto rychlé neutrony moderovat na tepelné.

Neutronový moderátor je látka, která slabě interaguje s neutronem, ale odebírá část jeho kinetické energie. V dnešních jaderných elektrárnách se používá jako moderátor voda.

Tím, že moderátor (v našem případě voda) odebírá neutronům kinetickou energii, slouží současně k přenášení tepla.

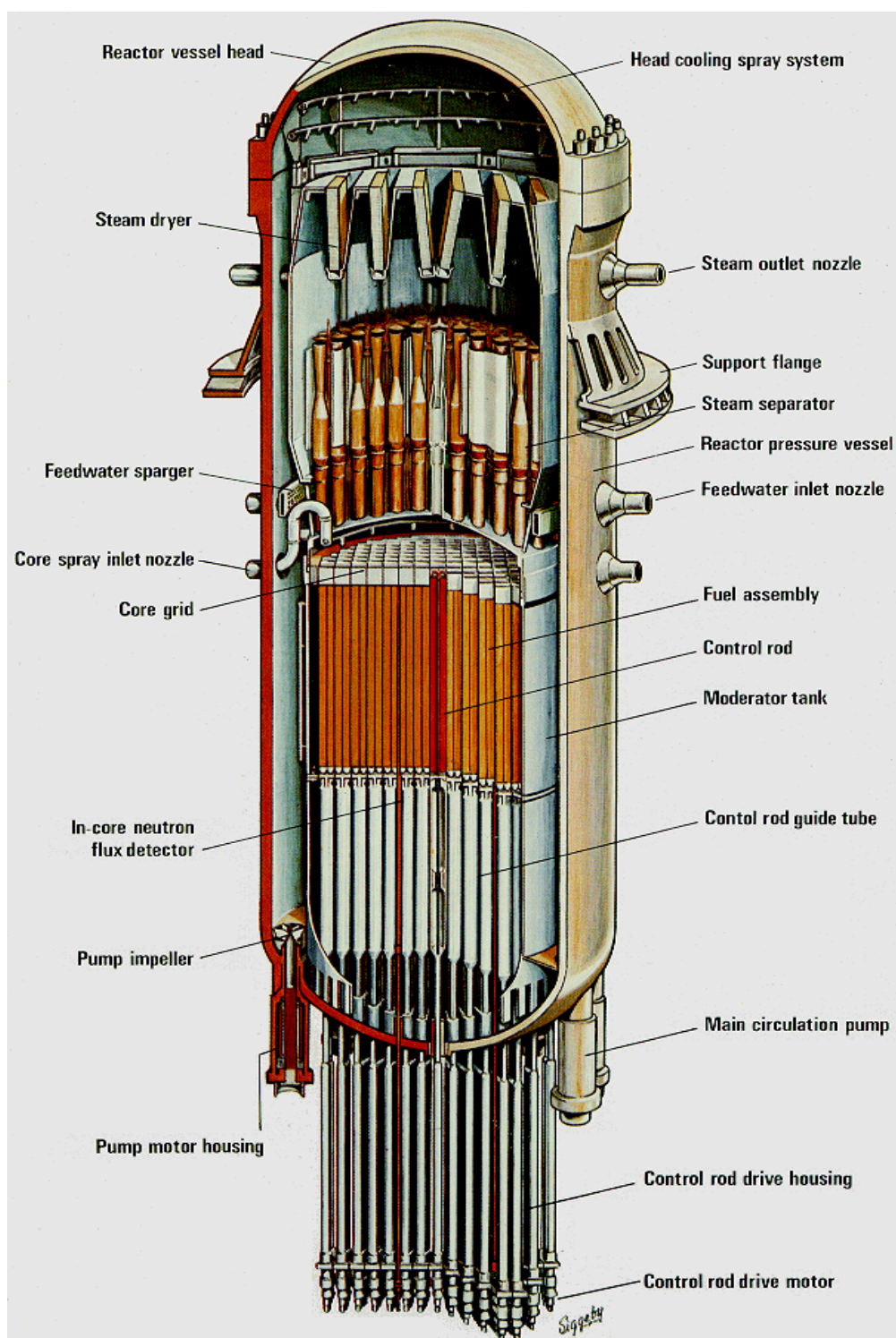
To ale není všechno. Kdybychom řetězovou reakci neřídili, tak by nakonec došlo k jadernému výbuchu. Součástí reaktoru tedy musí být mechanismus, kterým budeme řídit počet neutronů v jádru reaktoru. V dnešních reaktorech je tento mechanismus realizován tzv. kontrolními tyčemi. Ty jsou vyrobeny z takové chemické látky, která je schopna absorbovat dostatek neutronů. Příkladem může být kadmium, stříbro, indium.



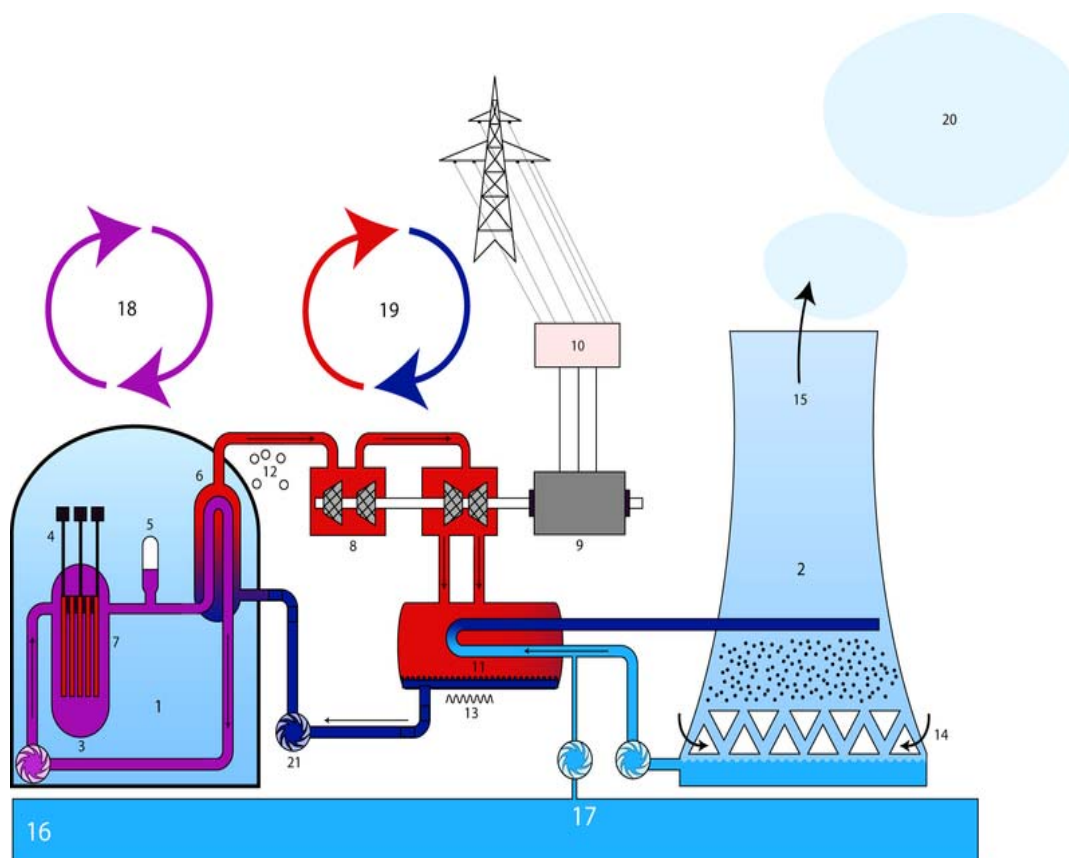
*Obrázek 5-25: Jaderná elektrárna Temelín (chladicí věže) .*

Na následujících obrázcích je schéma jádra typického jaderného reaktoru a schématický náčrt čerpání tepelné energie z jádra reaktoru a její přeměna na elektrickou energii.





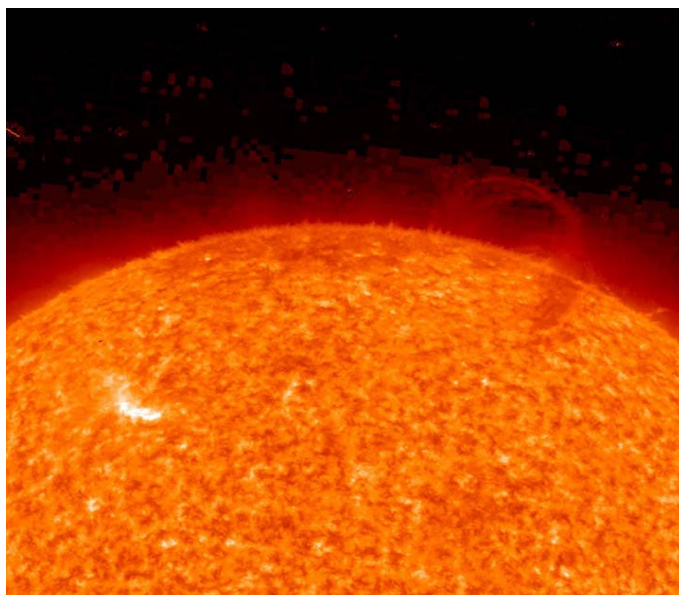
Obrázek 5-26: Jádro typického jaderného reaktoru.



Obrázek 5-27: Schéma odvádění tepla z jádra reaktoru a jeho přeměna na elektrickou energii. 1-reaktorová hala, uzavřená v nepropustném kontejnmentu, 2-chladicí věž, 3 – tlakovodní reaktor, 4- řídicí tyče, 5- kompenzátor objemu, 6- parogenerátor; zde horká voda pod vysokým tlakem vyrábí páru v sekundárním okruhu, 7- Aktivní zóna, 8-Turbína - vysokotlaký a nízkotlaký stupeň, 9- Elektrický generátor, 10- Transformační stanice, 11-Kondenzátor sekundárního okruhu, 14-Přívod vzduchu do chladicí věže, 15- Odvod teplého vzduchu a páry komínovým efektem, 16- Oběhové čerpadlo primárního okruhu, 17- Napájecí čerpadlo chladicího okruhu, 18- Primární okruh (voda pouze kapalná pod vysokým tlakem), 19- Sekundární okruh (červeně značena pára, modře voda), 20- oblaka vzniklá kondenzací vypařené chladicí vody, 20- oběhové čerpadlo sekundárního okruhu

### 5.10.2 Jaderná fúze

Opakem jaderného štěpení je slučování lehkých jader na těžší. Z grafu na obrázku 5-17 je vidět, že když se uskuteční reakce, při které se sloučí lehká jádra a vytvoří těžší směrem k  $A=56$  ( $\text{Fe}^{56}$ ), tak vazebná energie na nukleon roste. A tedy jako v případě štěpné reakce je i zde uvolněna energie ve formě kinetické energie produktů. Nejbližší místem, kde přirozeně probíhá jaderná fúze, je naše Slunce. Typická posloupnost fúzních reakcí, které se v něm uskutečňují, je tzv. proton-protonový cyklus



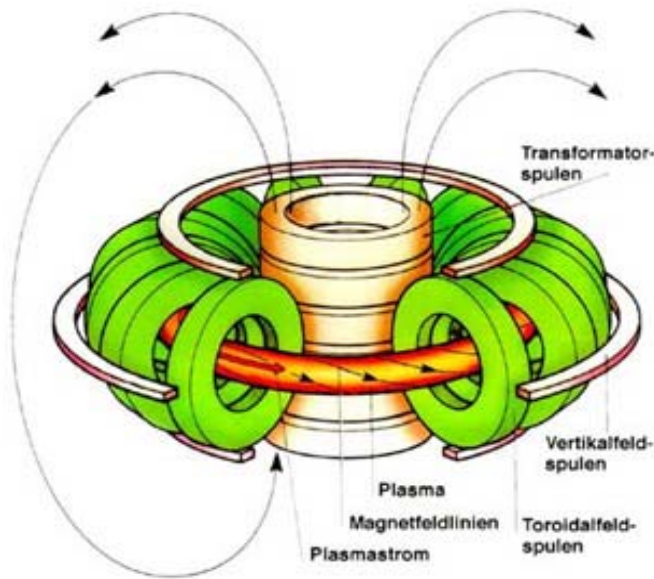
Obrázek 5-28: Slunce (Zdroj SOHO)



Při této reakci je uvolněno okolo 25 MeV energie.

V současné době se vědci a inženýři snaží svázat tento zdroj energie v zařízeních nazvané TOKAMAKy. V případě úspěchu tak získáme čistý (v dnešní ekologické hantýrce – zelený) nevyčerpatelný zdroj energie.





Obrázek 5-29: Schéma TOKAMAKu([www.euronuclear.org](http://www.euronuclear.org)).

V tomto zařízení se vytváří toroidní magnetické pole, ve kterém se uchovává vysokoteplotní plazma. Cílem inženýrů a vědců je vytvořit stacionární plazma. Musí se dosáhnout takových podmínek, aby ztráty energie a energetické zisky byly v rovnováze. Pokud jaderná fúze nestačí kompenzovat ztráty energie, je nutno dodávat do systému energii zvenčí.

### Energetická rovnováha

Výkon zdroje energie rozdělíme na dvě části, na zdroje získané ze samotné jaderné fúze a na externí zdroje, tj.

$$P_{\text{zdroj}} = P_{\text{fuze}} + P_{\text{ext}} \quad (5-158)$$

Při jaderném slučování vodíku vzniká jádro helia (alfa částice) a neutron. Výkon fúze tedy dělíme na dvě části a píšeme

$$P_{\text{fuze}} = P_{\alpha} + P_n \quad (5-159)$$

přičemž 20% uvolněné energie odnáší alfa částice a 80% odnáší neutron. Takže do plazmy se dostává pouze 20% uvolněné energie z fúze, protože nabitá alfa částice je polapená magnetickým polem, které vězní plazmu, zatímco neutron odnáší 80% energie pryč z plazmy a odevzdá ji až stínění tokamaku.

Ztráty energie v plazmě jsou způsobeny tím, že magnetické pole udržující plazma není 100%, částice a teplo difundují z centra plazmatu k jeho povrchu. Další ztráty jsou způsobeny zářením. Žhavé těleso se ochlazuje různými vyzařovacími procesy: elektrony emitují spojité záření při kolizích s ionty; elektrony emitují synchrotronové záření díky svému gyračnímu pohybu.

Rovnováhu mezi příjmy a ztrátami energie vyjádříme pomocí časové variace energie plazmatu, kterou píšeme ve tvaru

$$\frac{dW}{dt} = P_{\alpha} + P_{ext} - P_{ztraty} \quad (5-160)$$

Pokud je  $dW/dt > 0$ , pak plazma získává energii a pokud je  $dW/dt < 0$ , tak plazma energii ztrácí. Rovnováha nastává v okamžiku, kdy

$$\frac{dW}{dt} = 0 \quad (5-161)$$

Definujme několik užitečných veličin:

- $t_E$  je doba udržení plazmatu, tj., charakteristický čas poklesu energie plazmatu, je to doba která trvá plazmatu, aby se vyčerpalo ze svých zdrojů energie v případě, že je zastaven přísun energie z externích zdrojů. Tedy platí

$$P_{ztraty} = \frac{W}{t_E} \quad (5-162)$$

- faktor zesílení  $Q$  je definován výrazem

$$Q = \frac{P_{fuze}}{P_{ext}} \quad (5-163)$$

Pokud je  $Q > 1$ , tak to znamená, že více energie plazmatu bylo vyprodukováno fúzí, než dodávkami zvenčí.

- zapálení je okamžik, kdy výkon, zabezpečený fúzní reakcí, je dostatečný ke kompenzaci ztrát, tj. když

$$P_{\alpha} = P_{ztraty} \quad (5-164)$$

Externí zdroj pak může být vypnut.

Tak se dostáváme k formulování kritéria, které klademe na vlastnosti plazmatu, abychom v tokamaku dospěli k úspěšnému zapálení.

### Lawsonovo kritérium

Tepelná energie D-T plazmatu (ionty deuteria a tricia a volné elektrony) je

$$W = \int \frac{3}{2} k [n_e T_e + (n_D + n_T) T_{iont}] dV . \quad (5-165)$$

Předpokládejme, že naše plazma obsahuje 50% deuteria a 50% tricia a dále využijeme, že plazma je blízko neutrálního stavu. Za těchto předpokladů tedy platí následující identity

$$n_D = n_T \quad (5-166)$$

a

$$n_{iont} = n_D + n_T = n , \quad (5-167)$$

z čehož plynou identity

$$n_D = n_T = \frac{n}{2} . \quad (5-168)$$

Dále budeme předpokládat, že teplota je v plazmatu uniformní, tj. platí

$$T_{elektron} = T_{ionty} = T . \quad (5-169)$$

Tepelná energie T-D plazmatu za těchto předpokladů je dána výrazem

$$W = 3 n k T V . \quad (5-170)$$

Dále součin fúzních reakcí  $N_{fúze}$  a energie fúze  $E_{fúze}$  nám dá výkon fúze  $P_{fúze}$ , tedy píšeme

$$P_{fúze} = N_{fúze} \times E_{fúze} . \quad (5-171)$$

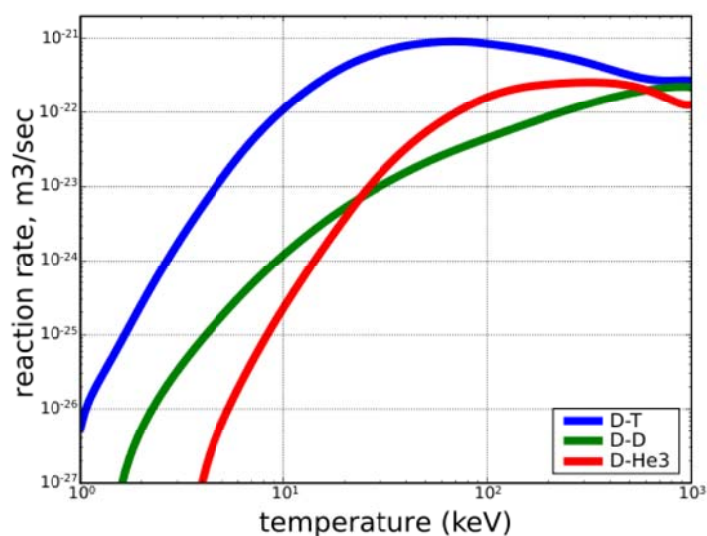
Počet fúzních reakcí nechť je dán vztahem

$$N_{fúze} = \int n_D n_T \langle \sigma v \rangle dV , \quad (5-172)$$

který má za výše uvedených předpokladů výsledný tvar

$$N_{fúze} = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle V . \quad (5-173)$$

Zde  $\langle \sigma v \rangle$  je střední hodnota součinu účinného průřezu a relativní rychlosti interagujících jader. Součin  $n^2 \langle \sigma v \rangle$  je potom reakční rychlost (počet fúzních reakcí za jednotku času na jednotku objemu).



Obrázek 5-30: Závislost  $\langle \sigma v \rangle$  fúze na teplotě  $T$  plazmatu a na typu plazmatu.

Závislost  $\langle \sigma v \rangle$  na teplotě D-T plazmatu je na intervalu teplot 10-20 keV dána vztahem

$$\langle \sigma v \rangle \sim CT^2 . \quad (5-174)$$

Fúzní výkon je potom dán výrazem

$$P_{fúze} = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle V E_{fúze} . \quad (5-175)$$

Ve stacionárním stavu rovnici (6-109) přepíšeme na tvar



$$P_{\alpha} + P_{ext} = P_{ztraty} = \frac{W}{t_E} , \quad (5-176)$$

kde poslední rovnost plyne ze vztahu (5-162). Dále dosadíme (5-163) za  $P_{ext}$  a dostáváme

$$P_{fúze} \left( \frac{P_{\alpha}}{P_{fúze}} + \frac{1}{Q} \right) = \frac{W}{t_e} . \quad (5-177)$$

Dosadíme sem za výraz pro fúzní výkon z formule (5-174) a za výraz pro tepelnou energii plazmatu ze vzorce (5-170). Rovnici (6-176) potom píšeme ve tvaru

$$n t_E = 12 k \left( \frac{E_{\alpha}}{E_{fúze}} + \frac{1}{Q} \right)^{-1} E_{fúze}^{-1} \frac{T}{\langle \sigma v \rangle} . \quad (5-178)$$

Budeme-li nyní zadávat teplotu a energii v keV potom, v případě D-T plazmatu, máme

$$k = 1 \text{ (Boltzmanova konstanta)} , \quad (5-179)$$

$$E_{fúze} = 17.59 \text{ MeV} = 17590 \text{ keV} , \quad (5-180)$$

$$E_{\alpha} = 3.56 \text{ MeV} = 35600 \text{ keV} , \quad (5-181)$$

$$Q \rightarrow \infty \text{ (zapálení)} \quad (5-182)$$

a

$$\langle \sigma v \rangle \sim 1.18 \cdot 10^{-24} T^2 m^{-3} s^{-1} \quad (5-183)$$

pak Lawsonovo kritérium píšeme ve tvaru

$$n t_E T > 2.6 \times 10^{21} \text{ keV m}^{-3} \text{ s}^{-1} , \quad (5-184)$$

ktelé říká, že pokud má být v tokamaku zažehnuta fúze, která bude schopna dodávat energii k udržení plazmatu a navíc energii, kterou bude možné odebírat tak součin hustoty, doby udržení plazmatu a jeho teploty musí být větší než spočítaná mezní hodnota pro dané plazma.

Toto kritérium ukazuje, jak je technologicky náročné dosáhnout takové fúze a čerpat z ní energii.

### **SHRNUTÍ KAPITOLY**

V této kapitole jsme se dozvěděli, jak vedl Rutherfordův experiment k odhalení struktury atomu a nalezení délkové škály jádra atomu ( $10^{-15}$  m). Ukázali jsme, že v jádru jsou protony a neutrony. Ukázali jsme mechanismus interakce mezi nukleony v jádře –

Yukawův výměnný mechanismus. Dále jsme definovali pojem vazebné energie nukleonů v jádře a závislost vazebné energie na jeden nukleon, v případě stabilních jader, na nukleonovém čísle. Dále jsme ukázali, proč jsou těžká jádra nestabilní a odvodili jsme pro ně rozpadový zákon. Popsali jsme čtyři rozpadové řady, podle kterých se těžká jádra rozpadají jedno v druhé až dosáhnou stability. Nakonec jsme ukázali, jak lze využít principů jaderného štěpení a řetězové reakce v jaderných elektrárnách. A ukázali jsme, jak v principu řídit termojadernou reakci, a odvodili jsme kritérium, které je nutné splnit, abychom mohli v tokamaku spustit samostatnou jadernou fúzi.

## SHRnutí STUDIjNí OPORY

Úvod do moderní fyziky je textem seznamujícím posluchače se základy dvou klíčových fyzikálních teorií budovaných od počátků 20. století a se základními praktickými aplikacemi těchto teorií.

V případě relativistické fyziky jsou vyloženy jak základy speciální teorie relativity jejíž efekty mohou být výrazné i v pozemských podmínkách, a s jejímiž důsledky a aplikacemi se dnes setkáváme doslova na každém kroku, neboť jsou základem pro využití jaderné (a případně termonukleární ) energie, tak se základy obecné teorie relativity popisující gravitaci jako zakřivení prostoru a času, kdy jsou sice efekty v pozemských podmínkách velice slabé a stěží pozorovatelné, nicméně jsou relevantní pro bezchybné fungování systému navigace, známého GPS.

Popis mikrosvěta je doménou kvantové fyziky. Je popsána cesta k finální formulaci základních principů určujících chování hmoty na prostorových škálách srovnatelných s rozměrem atomů, cesta završená zavedením pojmu vlnové funkce charakterizující chování atomů a jejich konstituentů a tzv. pravděpodobnostní interpretace fyzikálního významu vlnové funkce. Podrobně je rozebrán nejjednodušší model u atomu vodíku. Poté je vyložena problematika popisu jádra atomu a experimentálního ověřování vlastností atomových jader rozptylovými experimenty. Jsou popsány fenomenologické modely atomových jader a diskutovány základní principy konstrukce a činnosti urychlovačů částic, jež umožňují experimentální ověření platnosti modelů atomových jader. Závěrečné části jsou věnovány popisu aplikací základů atomové a jaderné fyziky, jež mají klíčový význam v každodenním životě, a to v oblasti energetiky ( jaderné štěpení a fúze) a monitorování životního prostředí ( transformace jader, rozpadové zákony pro radioaktivní látky ).

Je tak ukázána přirozená vazba mezi základními zákony moderní fyziky a jejich přímou aplikací v praxi, především v případě zdrojů energie a ochrany životního prostředí.

**Doporučená literatura:**

1. Jan Horský, *Mechanika ve fyzice*, Praha : Academia, 2001, ISBN: 80-200-0208-1
2. Luboš Skála, *Úvod do kvantové mechaniky*, Praha: Academia, 2005, ISBN: 80-200-1316-4
3. Ivan Úlehla, *Atomy, jádra, částice*, Praha: Academia, 1990, ISBN:80-200-0135-2
4. Francis F. Chen, *Úvod do fyziky plazmatu*, Praha: Academia, 1984

**Použitá literatura:**

1. Jan Horský, *Mechanika ve fyzice*, Praha : Academia, 2001, ISBN: 80-200-0208-1
2. Luboš Skála, *Úvod do kvantové mechaniky*, Praha: Academia, 2005, ISBN: 80-200-1316-4
3. Ivan Úlehla, *Atomy, jádra, částice*, Praha: Academia, 1990, ISBN:80-200-0135-2
4. Francis F. Chen, *Úvod do fyziky plazmatu*, Praha: Academia, 1984
5. Neil Ashby, *Principles of Modern Physics*, San Francisco: Holden-Day, INC, 1970
6. Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, Inc, 1972, ISBN: 0-471-92567-5
7. Bernard F. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge Univ. Press, 1985, ISBN: 0-521-27703-5
8. Walter Greiner, *Quantum Mechanics. Special Chapters*, Springer, 1998, ISBN: 3-540-60073-6

## PŘEHLED DOSTUPNÝCH IKON A POUŽITÝCH ZKRATEK

|                                                                                     |                        |                                                                                     |                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
|    | Čas potřebný ke studiu |    | Cíle kapitoly            |
|    | Klíčová slova          |    | Nezapomeňte na odpočinek |
|    | Průvodce studiem       |    | Průvodce textem          |
|    | Rychlý náhled          |    | Shrnutí                  |
|    | Tutoriály              |    | Definice                 |
|    | K zapamatování         |    | Případová studie         |
|    | Řešená úloha           |    | Věta                     |
|    | Kontrolní otázka       |    | Korespondenční úkol      |
|   | Odpovědi               |   | Otázky                   |
|  | Samostatný úkol        |  | Další zdroje             |
|  | Pro zájemce            |  | Úkol k zamyšlení         |

ZKR

Popis zkratky